

1. (a) $\frac{AB}{\sin 65^\circ} = \frac{15}{\sin 58^\circ}$ 1M

$AB \approx 16.0 \text{ cm}$ 1A

$AC^2 = AB^2 + 17^2 - 2(AB)(17) \cos 116^\circ$ 1M

$AC \approx 28.0 \text{ cm}$ 1A

(b) $\angle BAD = 180^\circ - 58^\circ - 65^\circ = 57^\circ$

$AK = AB \cos 57^\circ \approx 8.73 \text{ cm}$ 1M

$27^2 = AC^2 + 15^2 - 2(AC)(15) \cos \angle CAD$ 1M

$\angle CAD \approx 70.5^\circ$ 1A

$AC \cos \angle CAD \approx 9.36 \text{ cm} \neq AK$ 1M

故此， CK 不垂直於 AD 。 1A

不同意該宣稱。 1A

2. (a) 所求面積 = $\frac{1}{2}(20)(24) \sin 60^\circ$ 1M

$\approx 208 \text{ cm}^2$ 1A

(b) 設 E 為 CD 上的一點使得 $AE \perp CD$ 。 1M

所求之角為 $\angle AEB$ 。 1M

$CD^2 = 20^2 + 24^2 - 2(20)(24) \cos 60^\circ$ 1M

$CD \approx 22.3 \text{ cm}$ 1M

考慮 $\triangle ACD$ 的面積。 1A

$\frac{1}{2}(CD)(AE) = \frac{1}{2}(20)(24) \sin 60^\circ$ 1M

$AE \approx 18.7 \text{ cm}$ 1M

考慮 $\triangle ABE$ 。 1A

$\sin \angle AEB = \frac{18}{AE}$ 1M

$\angle AEB \approx 74.7^\circ$ 1A

(c) 由 A 至平面 BCD 的最短距離為 AB ，即 18 cm 。 1M

設 F 為 B 至平面 ACD 的投影。 1A

留意 F 在 AE 上，且 BF 為 B 至平面 ACD 的最短距離。 1A

$BE = \sqrt{AE^2 - 18^2} \approx 4.94 \text{ cm}$ 1M

考慮 $\triangle BEF$ 。 1A

$\sin \angle AEB = \frac{BF}{BE}$ 1M

$BF \approx 4.76 \text{ cm} < 18 \text{ cm}$ 1M

同意該宣稱。 1A

設 $h \text{ cm}$ 為 B 至平面 ACD 的最短距離。
留意 $\cos \angle AEB = \frac{\Delta BCD \text{ 的面積}}{\Delta ACD \text{ 的面積}}$ 。

考慮四面體 $ABCD$ 的體積。

$$\frac{1}{3}(\triangle ACD \text{ 的面積})(h) = \frac{1}{3}(\triangle BCD \text{ 的面積})(AB)$$

$$h = AB \times \frac{\triangle BCD \text{ 的面積}}{\triangle ACD \text{ 的面積}}$$

$$= AB \cos \angle AEB$$

$$< AB$$

同意該宣稱。

1M

1A

3. (a) (i) $CD = 20 \cos 30^\circ = 10\sqrt{3} \text{ cm}$

1A

$$BD = AD = 20 \sin 30^\circ = 10 \text{ cm}$$

$$AB = \sqrt{10^2 + 10^2} = 10\sqrt{2} \text{ cm}$$

1M

$$BC^2 = AB^2 + 20^2 - 2(AB)(20) \cos \angle BAC$$

1M

$$BC \approx 17.8 \text{ cm}$$

1A

(ii) 設 $s = \frac{10 + CD + BC}{2} \approx 22.6 \text{ cm.}$

1M

$$\triangle BDC \text{ 的面積}$$

$$= \sqrt{s(s - 10)(s - CD)(s - BC)}$$

1M

$$\approx 84.1 \text{ cm}^2$$

1A

(iii) 設 $h \text{ cm}$ 為所求高度。

$$\frac{1}{3}(\triangle ABC \text{ 的面積})(h) = \frac{1}{3}(\triangle BDC \text{ 的面積})(AD)$$

1M

$$\frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}(AB)(20) \sin 60^\circ \right) h = \frac{1}{3}(\triangle BDC \text{ 的面積})(10)$$

1M

$$h \approx 6.87$$

1A

(b) 該四面體的體積

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}(BD)(CD) \sin \angle BDC \right) (AD)$$

1M

$$= \frac{500\sqrt{3}}{3} \sin \angle BDC$$

當 $\angle BDC$ 為 90° 時，該四面體的體積最大。

當 $\angle BDC$ 由 45° 增至 90° 時，該四面體的體積增加。

當 $\angle BDC$ 由 90° 增至 120° 時，該四面體的體積減小。

1A

4. (a) $\frac{18}{\sin \angle ABD} = \frac{22}{\sin 80^\circ}$ 1M
 $\angle ABD \approx 53.7^\circ$ 或 126° (捨去) 1A
- (b) (i) $25^2 = 22^2 + 18^2 - 2(22)(18) \cos \angle ADC$ 1M
 $\angle ADC \approx 76.6^\circ$ 1A
- (ii) 設 E 為 BD 上的一點使得 $AE \perp BD$ 。
設 F 為 CD 上的一點使得 $EF \perp BD$ 。
所求之角為 $\angle AEF$. 1M
 $AE = 18 \sin 80^\circ \approx 17.7 \text{ cm}$ 1M
 $DE = 18 \cos 80^\circ \approx 3.13 \text{ cm}$
 $EF = DE \tan \angle CDB = DE \tan \angle ABD \approx 4.25 \text{ cm}$
 $DF = \sqrt{DE^2 + EF^2} \approx 5.28 \text{ cm}$
考慮 $\triangle ACD$ 。
 $AF^2 = 18^2 + DF^2 - 2(18)(DF) \cos \angle ADC$
 $AF \approx 17.5 \text{ cm}$
- 考慮 $\triangle AEF$ 。
 $AF^2 = AE^2 + EF^2 - 2(AE)(EF) \cos \angle AEF$
 $\angle AEF \approx 80.7^\circ$
 $> 80^\circ$
- 同意該宣稱。 1A
5. (a) (i) $AD^2 = 24^2 + 20^2 - 2(24)(20) \cos 80^\circ$ 1M
 $AD \approx 28.4 \text{ cm}$ 1A
(ii) $AE = AB = CD = 20 \text{ cm}$
 $AD^2 = 20^2 + 18^2 - 2(20)(18) \cos \angle AED$ 1M
 $\angle AED \approx 96.8^\circ$ 1A
- (b) $\triangle ADE$ 的面積 $= \frac{1}{2}(20)(18) \sin \angle AED$ 1M
 $= 180 \sin \angle AED \text{ cm}^2$
- $\triangle ADE$ 的面積隨 $\sin \angle AED$ 正變。 1M
 $\triangle ADE$ 的面積在 $\angle AED = 90^\circ$ 時最大。
假定 $\angle AED = 90^\circ$ 。
 $AD = \sqrt{20^2 + 18^2} = \sqrt{724} \text{ cm}$
 $AD^2 = 24^2 + 20^2 - 2(24)(20) \cos \angle ACD$
 $\angle ACD \approx 74.8^\circ$
當 $\angle ACD$ 由 80° 減小至 74.8° 時， $\triangle ADE$ 的面積增加。
當 $\angle ACD$ 由 74.8° 減小至 20° 時， $\triangle ADE$ 的面積減小。 1A
- (c) (i) $AD^2 = 24^2 + 20^2 - 2(24)(20) \cos 60^\circ$
 $AD = \sqrt{496} \text{ cm}$

$$BC = AD = \sqrt{496} \text{ cm}$$

$$BC^2 = 20^2 + 18^2 - 2(20)(18) \cos \angle BDC$$

1M

$$\cos \angle BDC = \frac{19}{60}$$

1A

(ii) 所求之角為 $\angle BAP$ 。

$$\angle APC = 180^\circ - 25^\circ - 60^\circ = 95^\circ$$

$$\frac{AP}{\sin 60^\circ} = \frac{24}{\sin 95^\circ}$$

1M

$$AP \approx 20.9 \text{ cm}$$

$$\frac{CP}{\sin 25^\circ} = \frac{24}{\sin 95^\circ}$$

$$CP \approx 10.2 \text{ cm}$$

$$PD = CD - CP \approx 9.82 \text{ cm}$$

$$BP^2 = PB^2 + AP^2 - 2(PB)(AP) \cos \angle BAP$$

1M

$$BP \approx 17.6 \text{ cm}$$

$$BP^2 = 20^2 + AP^2 - 2(20)(AP) \cos \angle BAP$$

1M

$$\angle BAP \approx 50.9^\circ$$

1A

6. (a) 考慮 $\triangle ABD$ 。

$$AD^2 = 75^2 + 60^2 - 2(75)(60) \cos 105^\circ$$

1M

$$AD \approx 107 \text{ cm}$$

1A

$$60^2 = 75^2 + AD^2 - 2(75)(AD) \cos(2\angle CAD)$$

1M

$$\angle CAD \approx 16.3^\circ$$

考慮 $\triangle ACD$ 。

$$\angle ACD = \angle ABC + \angle BAC \approx 121^\circ$$

1M

$$\frac{CD}{\sin \angle CAD} = \frac{AD}{\sin \angle ACD}$$

1M

$$CD \approx 35.3 \text{ cm}$$

1A

(b) (i) 設 E 為 AC 的延線上的一點使得 $DE \perp AC$ 。

所求距離 $= DE$

$$= AD \sin \angle CAD$$

1M

$$\approx 30.2 \text{ cm}$$

1A

$$(ii) CE = \sqrt{CD^2 - DE^2} \approx 18.4 \text{ cm}$$

$$\angle BCE = 180^\circ - \angle ACB = \angle ACD \approx 121^\circ$$

$$BC = 60 - CD \approx 24.7 \text{ cm}$$

考慮 $\triangle BCE$ 。

$$BE^2 = BC^2 + CE^2 - 2(BC)(CE) \cos \angle BCE$$

1M

$$BE \approx 37.6 \text{ cm}$$

考慮 $\triangle BDE$ 。

$$BD = \sqrt{BE^2 + DE^2}$$

1M

$$\approx 48.2 \text{ cm}$$

考慮 $\triangle BCD$ 。

$$BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2(BC)(CD) \cos \angle BCD$$

1M

$$\angle BCD \approx 105.7^\circ$$

$$> 105^\circ$$

同意該宣稱。

1A

7. (a) $\angle BAC = 180^\circ - 104^\circ - 18^\circ = 58^\circ$
 $\frac{AB}{\sin 18^\circ} = \frac{56}{\sin 58^\circ}$ 1M
 $AB \approx 20.4 \text{ cm}$ 1A
 $\frac{AC}{\sin 104^\circ} = \frac{56}{\sin 58^\circ}$
 $AC \approx 64.1 \text{ cm}$ 1A
- (b) $AP = \frac{AC}{4} \approx 16.0 \text{ cm}$
 $BP^2 = AP^2 + AB^2 - 2(AP)(AB) \cos 58^\circ$ 1M
 $BP \approx 18.1 \text{ cm}$
設 Q 及 R 分別為 P 及 C 在水平地面上的投影。
所求之角為 $\angle PBQ$ 。 1M
 $CR = 56 \sin 37^\circ \approx 33.7 \text{ cm}$
 $PQ = \frac{CR}{4} \approx 8.43 \text{ cm}$ 1M
 $\sin \angle PBQ = \frac{PQ}{BP}$
 $\angle PBQ \approx 27.8^\circ < 28^\circ$
該宣稱正確。 1A
8. (a) 設 M 為 AC 的中點。
 $BM = 20 \sin 60^\circ = 10\sqrt{3} \text{ cm}$
 $BE = BM \sin 60^\circ = 15 \text{ cm}$ 1A
 $\angle BEC = 90^\circ$ 。故此， BC 為 $\triangle BCE$ 的外接圓的直徑。 1M
因此， $DE = DB = DC = \frac{20}{2} = 10 \text{ cm}$ 。 1A
- (b) $AE = \sqrt{AB^2 - BE^2}$ 1M
 $= \sqrt{175} \text{ cm}$
 $AD = BM = 10\sqrt{3} \text{ cm}$
 $AE^2 = AD^2 + DE^2 - 2(AD)(DE) \cos \angle ADE$ 1M
 $\angle ADE \approx 49.5^\circ \neq 90^\circ$
不同意該宣稱。 1A

9. (a) 設 X 為 BC 的中點。

所求之角為 $\angle DAX$ 。

1M

留意 $\angle AXD = 70^\circ$ 。

$$AX = \sqrt{16^2 - \left(\frac{18}{2}\right)^2} = \sqrt{175} \text{ cm}$$

$$\frac{\sqrt{175}}{\sin \angle ADX} = \frac{15}{\sin 70^\circ}$$

1M

$$\angle ADX \approx 56.0^\circ$$

$$\angle DAX + \angle ADX + 70^\circ = 180^\circ$$

$$\angle DAX \approx 54.0^\circ$$

1A

$$(b) DX^2 = 15^2 + AX^2 - 2(15)(AX) \cos \angle DAX$$

1M

$$DX \approx 12.9 \text{ cm}$$

$$BD = \sqrt{DX^2 + XB^2} \approx 15.7 \text{ cm}$$

$$BD^2 = 16^2 + 15^2 - 2(16)(15) \cos \angle BAD$$

$$\angle BAD \approx 60.9^\circ$$

設 P 為 AD 上的一點使得 $BP \perp AD$ 及 $CP \perp AD$ 。

$$\sin \angle BAP = \frac{BP}{16}$$

$$BP \approx 14.0 \text{ cm}$$

$$CP = BP \approx 14.0 \text{ cm}$$

Required distance

$$= BP + CP$$

1M

$$\approx 28.0 \text{ cm}$$

$$> 27 \text{ cm}$$

總距離不可能小於 27 cm。

1A

10. (a) (i) $AC = 24 \text{ cm}$

$$\frac{\sin \angle BAC}{23} = \frac{\sin 70^\circ}{24}$$

1M

$$\angle BAC \approx 64.2^\circ$$

1A

(ii) 所求距離

$$= BC \sin \angle BCA$$

$$= 23 \sin(180^\circ - 70^\circ - \angle BAC)$$

1M

$$\approx 16.5 \text{ cm}$$

1A

$$(b) \angle ACB = 180^\circ - 70^\circ - \angle BAC \approx 45.8^\circ$$

$$\frac{AB}{\sin \angle ACB} = \frac{24}{\sin 70^\circ}$$

$$AB \approx 18.3 \text{ cm}$$

設 E 為 AC 上的一點使得 $BE \perp AC$ 。

$$AE = \sqrt{AB^2 - BE^2} \approx 7.96 \text{ cm}$$

1A

設 F 為 AD 上的一點使得 $FE \perp AC$ 。

所求之角為 $\angle BEF$ 。

1M

$$EF = AE \tan 60^\circ \approx 13.8 \text{ cm}$$

$$AF = \frac{AE}{\cos \angle EAF} \approx 15.9 \text{ cm}$$

$$BF^2 = AB^2 + AF^2 - 2(AB)(AF) \cos 45^\circ$$
1M

$$BF \approx 13.3 \text{ cm}$$

$$BF^2 = BE^2 + EF^2 - 2(BE)(EF) \cos \angle BEF$$

$$\angle BEF \approx 51.1^\circ$$
1A

(c) 所求面積

$$= \frac{1}{2}(AB)(24) \sin 45^\circ$$
1M

$$\approx 155 \text{ cm}^2$$
1A

(d) 設 $h \text{ cm}$ 為所求距離。

考慮四面體的體積。

$$\frac{h}{3}(\triangle ABD \text{ 的面積}) = \frac{1}{3}(BE \sin \angle BEF) \left(\frac{1}{2}(24)(24) \sin 60^\circ \right)$$
1M

$$h \approx 20.6$$
1A

11. (a) $2 \times \frac{1}{2}(8)(7) \sin \angle ABC = 28\sqrt{3}$

1M

$$\angle ABC = 120^\circ$$

$$AC^2 = 8^2 + 7^2 - 2(8)(7) \cos 120^\circ$$
1M

$$AC = 13 \text{ cm}$$
1A

(b) (i) $\frac{8}{\sin \angle ACB} = \frac{13}{\sin 120^\circ}$

1M

$$\angle ACB \approx 32.2^\circ \text{ 或 } 148^\circ \text{ (捨去)}$$

設 E 為 AC 上的一點使得 $BE \perp AC$ 。

$$BE = 7 \sin \angle ACB \approx 3.73 \text{ cm}$$
1M

留意 $\angle BED = 80^\circ$ 。

$$\sin \frac{\angle BED}{2} = \frac{\frac{1}{2}BD}{BE}$$

$$BD \approx 4.80 \text{ cm}$$

所求距離為 4.80 cm 。

1A

(ii) 設 X 為 B 在平面 ACD 上的投影。

可得 $\alpha = \angle BCX$ 及 $\beta = \angle BDX$ 。

1M

留意 $BC > BD$ 。

$$\sin \alpha = \frac{BX}{BC} < \frac{BX}{BD} = \sin \angle BDX = \sin \beta$$

由於 α 及 β 均為銳角， α 較小。

1A

12. (a) 在 $\triangle ABC$ 中，

$$BC^2 = 5^2 + 10^2 - 2(5)(10) \cos 80^\circ$$

1M

$$BC \approx 10.4 \text{ cm}$$

$$5^2 = 10^2 + BC^2 - 2(10)(BC) \cos \angle ABD$$

$$\angle ABD \approx 28.3^\circ$$

在 $\triangle ABD$ 中，

$$BD = 10 \cos \angle ABD$$

1M

$$\approx 8.80 \text{ cm}$$

1A

$$DC = BC - BD \approx 1.57 \text{ cm}$$

1A

(b) (i) 在 $\triangle ABC$ 中，當 $\theta = 45^\circ$ 時，

$$BC^2 = 10^2 + 5^2 - 2(10)(5) \cos 45^\circ$$

1M

$$BC \approx 7.37 \text{ cm}$$

1A

平面 ABD 與 ADC 之間的角為 $\angle BDC$ 。

1A

在 $\triangle BDC$ 中，

$$BC^2 = BD^2 + CD^2 - 2(BD)(CD) \cos \angle BDC$$

$$\angle BDC \approx 22.1^\circ$$

1A

$$< 25^\circ$$

同意該宣稱。

1A

(ii) 在 $\triangle ABC$ 中，當 $\theta = 40^\circ$ ，

$$BC^2 = 10^2 + 5^2 - 2(10)(5) \cos 40^\circ$$

$$BC \approx 6.96 \text{ cm}$$

故此， $BC + CD \approx 8.53 \text{ cm} < BD$ 。

1M

此違反了三角不等式，代表這情況不可能發生。

1

13. (a) 設 K 為 EF 上的一點使得 $CK \perp EF$ 。

考慮 $\triangle CFK$ 。

$$\cos \angle CFK = \frac{\left(\frac{60-30}{2}\right)}{50}$$

$$\angle CFK \approx 72.5^\circ$$

$$\angle DCF = 180^\circ - \angle CFK \approx 107^\circ$$

1A

考慮 $\triangle DCF$ 。

$$DF^2 = 30^2 + 50^2 - 2(30)(50) \cos \angle DCF$$

$$DF \approx 65.6 \text{ cm}$$

1A

(b) 設 J 為 FH 上的一點使得 $CJ \perp FH$ 。

$$AC = \sqrt{30^2 + 30^2} = 30\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$HF = \sqrt{60^2 + 60^2} = 60\sqrt{2} \text{ cm}$$

考慮 $\triangle CFJ$ 。

$$CJ = \sqrt{50^2 - \left(\frac{HF - AC}{2}\right)^2}$$
$$= 5\sqrt{82} \text{ cm}$$

1M

該平截頭體的高為 $5\sqrt{82} \text{ cm}$ 。

1A

(c) $BD = AC = 30\sqrt{2} \text{ cm}$

$$BF = DF \approx 65.6 \text{ cm}$$

考慮 $\triangle BDF$ 。

$$\text{設 } s = \frac{BD + BF + DF}{2}.$$

$$\triangle BDF \text{ 的面積} = \sqrt{s(s - BD)(s - DF)(s - BF)}$$

1M

$$\approx 1320 \text{ cm}^2$$

設 $h \text{ cm}$ 為所求距離。

考慮四面體 $CBD F$ 的體積。

$$\frac{1}{3} (\triangle BDF \text{ 的面積})(h) = \frac{1}{3} \left[\frac{(30)(30)}{2} \right] (5\sqrt{82})$$

1M

$$h \approx 15.5$$

1A

所求距離為 15.5 cm 。

14. (a) $\angle QPS = 180^\circ - 35^\circ - 45^\circ = 100^\circ$ 1M
 $\frac{PS}{\sin 35^\circ} = \frac{58}{\sin 100^\circ}$
 $PS \approx 33.8 \text{ cm}$ 1A
- (b) (i) $\frac{PQ}{\sin 45^\circ} = \frac{58}{\sin 100^\circ}$
 $PQ \approx 41.6 \text{ cm}$
 $RS = PQ \approx 41.6 \text{ cm}$
 $30^2 = PS^2 + RS^2 - 2(PS)(RS) \cos \angle PSR$ 1M
 $\angle PSR \approx 45.4^\circ$ 1A
- (ii) 設 T 為 P 在平面 QRS 的投影。
所求距離為 PT 。 1M
設 X 為 QS 上的一點使得 $PX \perp QS$ 。
設 Y 為 RS 上的一點使得 XY 為一直線。
 $SX = PS \cos 45^\circ \approx 23.9 \text{ cm}$ 1M
 $PX = PS \sin 45^\circ \approx 23.9 \text{ cm}$
 $XY = SX \tan 35^\circ \approx 16.7 \text{ cm}$
 $SY = \frac{SX}{\cos 35^\circ} \approx 29.2 \text{ cm}$
 $PY^2 = PS^2 + SY^2 - 2(PS)(SY) \cos \angle PSY$
 $PY \approx 24.7 \text{ cm}$
 $PY^2 = PX^2 + XY^2 - 2(PX)(XY) \cos \angle PXY$
 $\angle PXY \approx 72.4^\circ$
 $PT = PX \sin \angle PXT$ 1M
 $\approx 22.8 \text{ cm}$
 $< 23 \text{ cm}$
同意該宣稱。 1A

15. (a) $MS = 2 \sin 60^\circ = \sqrt{3} \text{ cm}$
 $PS = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2} \text{ cm}$
 $\sin \angle MPS = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ 1M
 $\angle MPS \approx 37.8^\circ$ 1A
- (b) 設 A 為 PS 上的一點使得 $MA \perp PS$ 。
 設 B 為 ST 上的一點使得 $AB \perp PS$ 。
 所求之角為 $\angle MAB$. 1A
 $MA = MP \sin \angle MPS \approx 1.37 \text{ cm}$ 1M
 $PA = MP \cos \angle MPS \approx 1.77 \text{ cm}$
 $AS = PS - PA \approx 1.06 \text{ cm}$
 $AB = AS \tan 45^\circ \approx 1.06 \text{ cm}$
 $BS = \frac{AS}{\cos 45^\circ} = 1.5 \text{ cm}$
 $BM^2 = BS^2 + MS^2 - 2(BS)(MS) \cos 30^\circ$ 1M
 $BM \approx 0.866 \text{ cm}$
 $BM^2 = AB^2 + MA^2 - 2(AB)(MA) \cos \angle MAB$
 $\angle MAB \approx 39.2^\circ$ 1A
 所求之角為 39.2° .
- (c) 設 E 為 WS 上的一點使得 $DE \perp WS$ 。
 設 F 為 RQ 上的一點使得 $DF \perp RQ$ 。
 $\triangle DSW$ 的面積 = $\frac{(WS)(DE)}{2} = \frac{WS\sqrt{DF^2 + EF^2}}{2}$ 1M
 由於 WS 及 EF 固定， $\triangle DSW$ 的面積在 DF 最短時為最小，即 $DF = 0$ 。
 當 D 在 P ， $DF \neq 0$ ，故此該面積不是最小。 1A

16. (a) $\angle ACB = 180^\circ - 40^\circ - 56^\circ = 84^\circ$

$$\frac{BC}{\sin 40^\circ} = \frac{72}{\sin 84^\circ}$$

$$BC \approx 46.5 \text{ cm}$$

所求面積

$$= \frac{1}{2}(72)(BC) \sin 56^\circ$$

$$\approx 1390 \text{ cm}^2$$

1M

(b) (i) $BD = \sqrt{72^2 + 40^2} = \sqrt{6784} \text{ cm}$

$$\frac{AC}{\sin 56^\circ} = \frac{72}{\sin 84^\circ}$$

$$AC \approx 60.0 \text{ cm}$$

$$CD = \sqrt{AC^2 + AD^2} \approx 72.1 \text{ cm}$$

1M

1A

考慮 $\triangle BCD$ 。

$$\text{設 } s = \frac{BD + BC + CD}{2} \approx 101 \text{ cm}.$$

所求面積

$$= \sqrt{s(s - BD)(s - BC)(s - CD)}$$

$$\approx 1670 \text{ cm}^2$$

1M

1A

(ii) 設 $h \text{ cm}$ 為所求距離。

$$\frac{1}{3}(\triangle BCD \text{ 的面積})(h) = \frac{1}{3}(\triangle ABC \text{ 的面積})(AD)$$

$$h \approx 33.2$$

1A

17. (a) $\frac{\sin \angle BAD}{85} = \frac{\sin 60^\circ}{102}$

1M

$$\angle BAD \approx 46.2^\circ \text{ 或 } 134^\circ \text{ (捨去)}$$

$$\angle BDA = 180^\circ - \angle BAD - 60^\circ \approx 73.8^\circ$$

$$AB^2 = 102^2 + 85^2 - 2(102)(85) \cos \angle BDA$$

$$AB \approx 113 \text{ cm}$$

1A

$$\angle BDC = 140^\circ - \angle BDA \approx 66.2^\circ$$

1A

$$BC = 85 \tan \angle BDC \approx 193 \text{ cm}$$

1A

$$CD = \frac{85}{\cos \angle BDC} \approx 211 \text{ cm}$$

1A

(b) (i) 設 G 為 BC 上的一點使得 $AG \perp BC$ 。

設 H 為 CD 上的一點使得 $GH \perp BC$ 。

所求之角為 $\angle AGH$ 。

1M

$$AC = \sqrt{CD^2 - AD^2} \approx 184 \text{ cm}$$

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2(AC)(BC) \cos \angle ACB$$

$$\angle ACB \approx 34.8^\circ$$

$$AG = AC \sin \angle ACB \approx 105 \text{ cm}$$

1M

$$CG = AC \cos \angle ACB \approx 151 \text{ cm}$$

$$\frac{GH}{85} = \frac{CG}{BC}$$

$$GH \approx 66.7 \text{ cm}$$

$$CH = \sqrt{GH^2 + CG^2} \approx 165 \text{ cm}$$

$$\angle ACD = \tan^{-1} \frac{102}{AC} \approx 29.0^\circ$$

$$AH^2 = AC^2 + CH^2 - 2(AC)(CH) \cos \angle ACD$$

$$AH \approx 89.3 \text{ cm}$$

$$AH^2 = AG^2 + GH^2 - 2(AG)(GH) \cos \angle AGH$$

$$\angle AGH \approx 57.5^\circ$$

(ii) 留意 B 在 F 的 $N15^\circ E$ 方位。

考慮影子的面積。

$$\frac{BD(BF \sin 15^\circ)}{2} + \frac{(BC)(BF \cos 15^\circ)}{2} = 2 \times 100^2$$

$$BF \approx 192 \text{ cm}$$

設 K 為 A 在水平地面上的投影。。

留意 F 、 B 及 K 共線。

$$AK = AG \sin \angle AGH \approx 88.8 \text{ cm}$$

1M

$$BK = \sqrt{AB^2 - AK^2} \approx 70.1 \text{ cm}$$

$$\tan \phi = \frac{AK}{BF + BK}$$

1M

$$\phi \approx 18.7^\circ < 20^\circ$$

該宣稱不正確。

1A

18. (a) $AB = 52 \times \frac{3}{4}$ 1M
 $= 39 \text{ cm}$ 1A
 $BC = 52 - 39 = 13 \text{ cm}$ 1A
- (b) (i) $\frac{\sin \angle BAC}{13} = \frac{\sin 77^\circ}{39}$ 1M
 $\angle BAC \approx 19.0^\circ$
 $\angle ABC = 180^\circ - 77^\circ - \angle BAC \approx 84.0^\circ$ 1M
 $AC^2 = 39^2 + 13^2 - 2(39)(13) \cos \angle ABC$ 1M
 $AC \approx 39.8 \text{ cm}$ 1A
- (ii) 設 Q 為 CF 上的一點使得 $BQ \perp CF$ 。
 $\triangle CDF$ 的面積 $= \frac{1}{2}(CF)(DQ)$
 $\triangle BCF$ 的面積 $= \frac{1}{2}(CF)(BQ)$
留意 $\angle BDQ = 90^\circ$ ，可得 $BQ > DQ$ ，及
 $\triangle BCF$ 的面積 $> \triangle CDF$ 的面積。
所求之和
 $< 2(\triangle BCF \text{ 的面積})$
 $= 2\left(\frac{1}{2}(13)(13) \sin(180^\circ - \angle ABC)\right)$ 1M
 $\approx 168 \text{ cm}^2$
 $< 168.5 \text{ cm}^2$
該面積之和小於 168.5 cm^2 。 1A
- (iii) $FC^2 = 52^2 + AC^2 - 2(52)(AC) \cos \angle BAC$
 $FC \approx 19.3 \text{ cm}$
 $52^2 = AC^2 + FC^2 - 2(AC)(FC)\angle ACF$ 1M
 $\angle ACF \approx 119^\circ$
 $> 90^\circ$
留意當 P 在線段 CF 上時，可得 $\angle APF \geq ACF > 90^\circ$ 。
因此， P 不在 CF 上。
不同意該宣稱。 1A

19. (a) (i) $\frac{PR}{\sin 38^\circ} = \frac{10}{\sin(180^\circ - 96^\circ - 38^\circ)}$ 1M
 $PR \approx 8.56 \text{ cm}$ 1A
 $TR^2 = 10^2 + PR^2 - 2(10)(PR) \cos 96^\circ$ 1M
 $TR \approx 13.8 \text{ cm}$
 $QR = TR - 8 \approx 5.83 \text{ cm}$ 1A
(ii) $PQ^2 = 10^2 + 8^2 - 2(10)(8) \cos 38^\circ$
 $PQ \approx 6.16 \text{ cm}$
 $\frac{\sin \angle QPR}{QR} = \frac{\sin 46^\circ}{PQ}$
 $\angle QPR \approx 42.9^\circ$ 1A
(b) (i) $\angle VPQ = 96^\circ - \angle QPR \approx 53.1^\circ$
 $CP = VP \cos \angle VPQ \approx 6.00 \text{ cm}$
 $CR^2 = CP^2 + PR^2 - 2(CP)(PR) \cos \angle CPR$
 $CR \approx 5.83 \text{ cm}$ 1A
(ii) $CR^2 + CP^2 \approx 70.0 \text{ cm}^2$
 $PR^2 \approx 73.3 \text{ cm}^2 \neq CR^2 + CP^2$
因此， $\angle PCR \neq 90^\circ$ 。 1M
 $\angle VCR$ 不是平面 VPQ 與平面 PQR 的夾角。
該宣稱不正確。 1A
20. (a) $\angle CTA = 180^\circ - 42^\circ - 30^\circ = 108^\circ$
 $\frac{CA}{\sin 108^\circ} = \frac{145}{\sin 42^\circ}$ 1M
 $CA \approx 206 \text{ m}$ 1A
 $AB^2 = 240^2 + AC^2 - 2(240)(AC) \cos 25^\circ$ 1M
 $AB \approx 102 \text{ m}$ 1A
(b) 設 T' 為 AC 上的一點使得 $TT' \perp AC$ 。
由 P 測得 T 的仰角為 $\angle TPT'$ 。
 $\tan \angle TPT' = \frac{TT'}{T'P}$
當 PT' 越短時，仰角越大。 1M
 $240^2 = AC^2 + AB^2 - 2(AC)(AB) \cos \angle CAB$ 1M
 $\angle CAB \approx 96.4^\circ > 90^\circ$
當 P 在 A 時， PT' 的長度為最短。
當 P 在 A 時，由 P 測得 T 的仰角最大。
同意該宣稱。 1A

21. 設 F 為 AD 的中點使得 $EF \perp AD$ 。

$$\begin{aligned} AF &= \frac{2}{2} = 1 \text{ cm} \\ BF &= \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} \text{ cm} \\ EF &= \sqrt{5} \tan 60^\circ = \sqrt{15} \text{ cm} \\ \text{所求體積} &= \frac{1}{3}(2^2)(\sqrt{15}) \\ &= \frac{4\sqrt{15}}{3} \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

22. 設 M 為 FG 的中點。

$$\begin{aligned} \text{則 } \theta &= \angle QPM \\ \tan \theta &= \frac{QM}{MP} \\ &= \frac{AF}{\frac{1}{2}(EF)} \\ &= 2 \end{aligned}$$

23. 由於 BV 垂直於平面 VAC ， $\angle BVA = \angle BVC = 90^\circ$ 。

$$AB = BC = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \text{ cm} \text{ 及 } BM = BN = 5 \text{ cm}$$

$\triangle BMN$ 為等邊三角形。故此， $MN = 5 \text{ cm}$ 。

$$\angle VBM = \tan^{-1} \frac{8}{6}$$

$$VM^2 = 6^2 + 5^2 - (2)(6)(5) \cos \angle VBM$$

$$VM = 5$$

故此， $VM = VN = MN = 5 \text{ cm}$ ，所求面積為 $\frac{1}{2}(5)^2 \sin 60^\circ = \frac{25\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2$ 。

24. 設 K 為 EF 的中點。所求之角為 $\angle MNK$ 。

在 $\triangle DEF$ 中，

$$\begin{aligned} \frac{7}{\sin 50^\circ} &= \frac{6}{\sin \angle DFE} \\ \angle DFE &\approx 41.0^\circ \text{ 或 } 139^\circ \text{ (捨去)} \end{aligned}$$

$$\angle DEF = 180^\circ - \angle DFE - 50^\circ \approx 89.0^\circ$$

$$NK^2 = \left(\frac{6}{2}\right)^2 + \left(\frac{7}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{6}{2}\right)\left(\frac{7}{2}\right) \cos \angle DEF$$

$$NK \approx 4.57 \text{ cm}$$

在 $\triangle MNK$ 中，

$$\tan \angle MNK = \frac{5}{NK}$$

$$\angle MNK \approx 48^\circ$$

25. $AP = \sqrt{36^2 + 48^2 + 63^2} = 87 \text{ cm}$

設 $s = \frac{AE + EP + AP}{2} = (k + 12) \text{ cm}$ 。

所求面積 $= \sqrt{s(s - 87)(s - k)(s - (k - 63))}$

$$= \sqrt{(k + 12)(k - 75)(12)(75)}$$

$$= \sqrt{900(k^2 - 63k - 900)} \text{ cm}^2$$

26. 設 K 為 EF 的中點。

留意 $M_5K \perp M_4M_5$ 。

可從三垂線定理求得 $M_1M_5 \perp M_4M_5$ 。

因此, $\theta = \angle KM_5M_1$ 。

設 $AB = 2x \text{ cm}$ 。

$$\begin{aligned}\tan \theta &= \frac{KM_1}{M_1M_5} \\ &= \frac{2x}{\sqrt{x^2 + x^2}} \\ &= \sqrt{2}\end{aligned}$$

27. 設 K 為 AC 上的一點使得 $DK \perp AC$ 。

可得 $x = \angle DKE$ 。

考慮 $\triangle ACD$ 的面積。

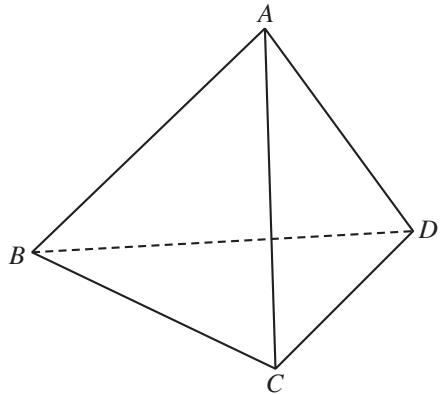
$$\begin{aligned}\frac{(AD)(CD)}{2} &= \frac{(AC)(DK)}{2} \\ \frac{(3)(4)}{2} &= \frac{\sqrt{3^2 + 4^2}(DK)}{2}\end{aligned}$$

$$DK = 2.4 \text{ cm}$$

考慮 $\triangle DKE$ 。

$$\begin{aligned}\tan x &= \frac{DE}{DK} \\ &= \frac{2}{2.4} \\ &= \frac{5}{6}\end{aligned}$$

28. 參照下圖。設 E 為 BC 的中點，且每邊的長度為 x cm。



在 $\triangle AED$ 中， $AE = DE = x \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}x}{2}$ cm。

$$x^2 = AE^2 + DE^2 - 2(AE)(DE) \cos \angle AED$$

$$\angle AED = \cos^{-1} \frac{1}{3}$$

考慮該四面體的體積。

$$\frac{1}{3} \left(\frac{x^2}{2} \sin 60^\circ \right) (AE \sin \angle AED) = 576$$

$$x \approx 17.0$$

設 X 為 A 在 BCD 上的投影。

留意 D 、 X 、 E 共線。

考慮 $\triangle AXE$ 。

所求高度 $= AE \sin \angle AED$

$$\approx 13.9 \text{ cm}$$

29. 所求之角為 $\angle AMF$ 。

$$FM = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52} \text{ cm}$$

$$\tan \angle AMF = \frac{14}{\sqrt{52}}$$

$$\angle AMF \approx 63^\circ$$

30. 留意 $\theta = \angle BKA$ 。

$$AK = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15 \text{ cm}$$

$$BK = \sqrt{15^2 + 8^2} = 17 \text{ cm}$$

$$\cos \theta = \frac{AK}{BK}$$

$$= \frac{15}{17}$$

31. $AY = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \text{ cm}$

$$XY = \frac{BV}{2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ cm}$$

考慮 $\triangle AXY$ 。

$$\text{Let } s = \frac{5+3+4k}{2} = 4+2k.$$

$$\text{所求面積} = \sqrt{s(s-5)(s-3)(s-4k)}$$

$$= \sqrt{(2k+4)(2k-1)(2k+1)(-2k+4)}$$

$$= \sqrt{(4k^2-1)(4k^2-16)}$$

$$= 2\sqrt{(4k^2-1)(k^2-4)}$$

留意當 $k = 1$ 時， $\triangle AXY$ 三邊的長度為 3 cm、4 cm 及 5 cm。

當 $k = 1$ 時， $\triangle AXY$ 是面積為 6 cm^2 的直角三角形。

當 $k = 1$ 時，檢查各選項的值。

A. 0

B. 0

C. 6

D. ERROR

答案為 C。

32. 設 K 為 ME 上的一點使得 $FK \perp ME$ 。[而事實上， K 在 M 點的位置。]

由於 $AF \perp EM$ ，可得 $AK \perp ME$ 。所求之角為 $\angle AKF$ 。

由於 $MH = EH = 12 \text{ cm}$ ， $\angle EMH = 45^\circ$ 及 $\angle FEM = 45^\circ$ 。

$$FK = FE \sin \angle FEM = 12\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$\text{所求之角} = \tan^{-1} \frac{AF}{FK} = \frac{10}{12\sqrt{2}} \approx 31^\circ$$

33. 設 N 為 AC 上的一點使得 $BN \perp AC$ 。

所求之角為 $\angle BND$ 。

設 $AB = AC = BC = CD = x \text{ cm}$ 。

$$BD = \sqrt{x^2 + x^2} = \sqrt{2}x \text{ cm}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{BN}{x}$$

$$BN = \frac{\sqrt{3}x}{2} \text{ cm}$$

$$\text{同樣地, } DN = BN = \frac{\sqrt{3}x}{2} \text{ cm.}$$

$$BD^2 = BN^2 + DN^2 - 2(BN)(DN) \cos \angle BND$$

$$\angle BND \approx 109^\circ$$

34. A. 設 $AB = BC = CD = DA = ED = FG = GH = HE = x$ 。

$$BX = \sqrt{x^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}x}{2}$$

$$\tan \angle BXF = \frac{BF}{BX}$$

$$\tan \angle BXF = \frac{2x}{\left(\frac{\sqrt{5}x}{2}\right)}$$

$$\angle BXF \approx 60.8^\circ$$

B. 所求之角為 $\angle BHF$ 。

$$FH = \sqrt{x^2 + x^2} = \sqrt{2}x$$

$$\tan \angle BHF = \frac{BF}{FH}$$

$$\tan \angle BHF = \frac{2x}{\sqrt{2}x}$$

$$\angle BHF \approx 54.7^\circ$$

C. 所求之角為 $\angle FXH$ 。

$$HX = \sqrt{(2x)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{17}x}{2}$$

$$AF = \sqrt{x^2 + (2x)^2} = \sqrt{5}x$$

$$FX = \sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + (\sqrt{5}x)^2} = \frac{\sqrt{21}x}{2}$$

$$FH^2 = FX^2 + HX^2 - 2(FX)(HX) \cos \angle FXH$$

$$\angle FXH \approx 37.5^\circ$$

D. 設 Y 為 EH 上的一點使得 $XY \perp EH$ 。

所求之角為 $\angle XHY$ 。

$$\tan \angle XHY = \frac{XY}{HY}$$

$$\tan \angle XHY = \frac{2x}{\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$\angle XHY \approx 76.0^\circ$$

35. 設 $s = \frac{6+x+(x+2)}{2} = (x+4)$ cm。

$$\begin{aligned}\triangle ABC \text{ 的面積} &= \sqrt{s(s-AB)(s-BC)(s-AC)} \\ &= \sqrt{(x+4)(x-2)(4)(2)} \\ &= \sqrt{8(x+4)(x-2)} \text{ cm}^2\end{aligned}$$

$$\sqrt{8(x+4)(x-2)} = \sqrt{216}$$

$$8x^2 + 16x - 280 = 0$$

$$x = 5 \quad \text{或} \quad -7 \quad (\text{捨去})$$

$$BD = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50} \text{ cm}$$

$$AD = \sqrt{(5+2)^2 + 5^2} = \sqrt{74} \text{ cm}$$

$$6^2 = AD^2 + BD^2 - 2(AD)(BD) \cos \angle ADB$$

$$\angle ADB \approx 44^\circ$$

36. I. ✓。

II. ✓。

III. ✗。

留意 θ 、 α 及 β 在 0° 與 90° 之間。

由於 $AB > AX > AC$ ，可得 $\frac{1}{AB} < \frac{1}{AX} < \frac{1}{AC}$ 。

可得 $\tan \theta = \frac{VA}{AB}$ 、 $\tan \beta = \frac{VA}{AX}$ 及 $\tan \alpha = \frac{VA}{AC}$ 。

因此， $\tan \theta < \tan \beta < \tan \alpha$ 及 $\theta < \beta < \alpha$ 。

37. 設 E 為 AC 的中點。

可得 $\theta = \angle BED$ 。

設 $BC = 2x$ 。

$$BE = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = \sqrt{3}a$$

$$DE = BE = \sqrt{3}a$$

$$(2a)^2 = BE^2 + DE^2 - 2(BE)(DE) \cos \theta$$

$$\cos \theta = \frac{1}{3}$$

38. 設 $PQ = 2^\circ$ 則 $RS = 3^\circ$

$$RQ = \frac{PQ}{\tan 45^\circ} = 2$$

$$QS = \frac{PQ}{\tan 30^\circ} = 2\sqrt{3}$$

考慮 $\triangle QRS$ 。

$$RS^2 = RQ^2 + QS^2 - 2(RQ)(QS) \cos \angle RQS$$

$$\angle RQS \approx 60^\circ$$

39. 設 E 為平面 BCD 上的一點使得 AE 垂直於平面 BCD 。

所求之角為 $\angle ABE$ 。

$$\frac{1}{3}(335)(AE) = 2010$$

$$AE = 18 \text{ cm}$$

$$\sin \angle ABE = \frac{18}{26}$$

$$\angle ABE \approx 43.8^\circ$$

40. 設 M 為 BC 上的點使得 $AM \perp BC$ 。

留意 AMD 為該四面體的對稱面，且垂直於平面 BCD 。

可得 $\angle AMD = 80^\circ$ 及所求之角為 $\angle ADM$ 。

考慮 $\triangle ABC$ 。

$$AM = 56 \sin 60^\circ = 28\sqrt{3} \text{ cm}$$

考慮 $\triangle BCD$ 。

$$DM = \sqrt{60^2 - 28^2} = \sqrt{2816} \text{ cm}$$

考慮 $\triangle AMD$ 。

$$AD^2 = AM^2 + DM^2 - 2(AM)(DM) \cos 80^\circ$$

$$AD \approx 65.4 \text{ cm}$$

$$AM^2 = AD^2 + DM^2 - 2(AD)(DM) \cos \angle ADM$$

$$\angle ADM \approx 47^\circ$$