

DAYM2-AOD-2425-ASM-SET 4-MATH

建議題解

$$1. \quad (a) \quad \text{水的體積} = \frac{1}{3}(4)^2\pi(12) \times \left[1 - \frac{(12-h)^3}{12^3}\right] \quad 1M+1M$$

$$= 64\pi - \frac{\pi(12-h)^3}{27} \quad 1A$$

(b) 設 $V \text{ cm}^3$ 為水的體積。

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{9}(12-h)^2 \frac{dh}{dt} \quad 1M$$

當 $\frac{dV}{dt} = \pi$ 及 $h = 6$,

$$\pi = \frac{\pi}{9}(12-6)^2 \times \frac{dh}{dt} \quad 1M$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{4}$$

所求之率為 $\frac{1}{4} \text{ cm/s}$ 。 1A

$$2. \quad (a) \quad \text{面積} = \frac{1}{2}(u)(4 \ln u) = 2u \ln u \quad 1A$$

(b) 設 v 為 PQ 的長度及 A 為 $\triangle OPQ$ 的面積。

$$v = 4 \ln u$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{4}{u} \times \frac{du}{dt}$$

當 $u = e$ 及 $\frac{dv}{dt} = -4$,

$$-4 = \frac{4}{e} \times \frac{du}{dt} \quad 1M$$

$$\frac{du}{dt} = -e \quad 1A$$

$$\frac{dA}{dt} = \left(2u \times \frac{1}{u} + 2 \ln u\right) \frac{du}{dt} \quad 1M$$

$$= -4e$$

所求之率為 $-4e/\text{s}$ 。 1A

3. (a) $A = m(4e^{-m})$

$$= 4me^{-m} \quad 1A$$

(b) (i) $\frac{dA}{dm} = 4e^{-m} + 4me^{-m}(-1)$ 1M

$$= 4e^{-m}(1 - m)$$

當 $\frac{dA}{dm} = 0$, $m = 1$ 。 1A

m	$0 < m < 1$	$m > 1$
$\frac{dA}{dm}$	+	-

1M

A 在 $m = 1$ 時達至極大值。

所求之值 $= 4(1)e^{-1}$

$$= 4e^{-1}$$

1A

(ii) $\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dm} \cdot \frac{dm}{dt}$ 1M

$$= 4e^{-0.5}(1 - 0.5) \cdot 0.5$$

$$= e^{-0.5}$$

1A

所求變率為每秒 $e^{-0.5}$ 單位。

4. (a) 水平面的半徑

$$= \sqrt{13^2 - (13 - h)^2}$$

1M

$$= \sqrt{26h - h^2}$$

$$A = \pi(\sqrt{26h - h^2})^2$$

$$= \pi(26h - h^2)$$

1A

(b) $V = \frac{1}{3}\pi h^2(39 - h)$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{3}\pi \left(78h \frac{dh}{dt} - 3h^2 \frac{dh}{dt} \right)$$

1M

$$= \pi(26h - h^2) \frac{dh}{dt}$$

$$= A \frac{dh}{dt}$$

1A

$$\frac{1}{20}A = A \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{20}$$

1A

所求變率為 $\frac{1}{20}$ cm/s。

5. (a) (i) 設 C 為 OP 上的一點使得 $AC \perp OP$ 。

$$\begin{aligned} AC &= \sqrt{OA^2 - OC^2} & 1M \\ &= \sqrt{4^2 - (4-x)^2} \\ &= \sqrt{8x - x^2} \text{ cm} \end{aligned}$$

$$DP = AC = \sqrt{8x - x^2} \text{ cm} \quad 1A$$

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad S &= \frac{(DP)(AD)}{2} \\ &= \frac{x\sqrt{8x - x^2}}{2} \end{aligned} \quad 1A$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad \frac{dS}{dx} &= \frac{1}{2} \left[\sqrt{8x - x^2} + \frac{x(8 - 2x)}{2\sqrt{8x - x^2}} \right] & 1M \\ &= \frac{(8x - x^2) + x(4 - x)}{2\sqrt{8x - x^2}} \\ &= \frac{x(6 - x)}{\sqrt{8x - x^2}} \end{aligned}$$

當 $\frac{dS}{dx} = 0$ ， $x = 6$ 或 0 （捨去）。 1A

x	$0 < x < 6$	$6 < x < 8$
$\frac{dS}{dx}$	+	-

1M

S 在 $x = 6$ 達至極大值。

$$\begin{aligned} \text{所求之值} &= \frac{6\sqrt{8(6) - 6^2}}{2} \\ &= 6\sqrt{3} \end{aligned} \quad 1A$$

$$\begin{aligned} \text{(c)} \quad \frac{dS}{dt} &= \frac{dS}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} & 1M \\ &= \frac{2(6 - 2)}{\sqrt{8(2) - 2^2}} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \\ &= -\frac{4}{3} \end{aligned}$$

$\triangle ADP$ 的面積以 $\frac{4}{3} \text{ cm}^2/\text{s}$ 的變率減小。 1A