結構式試題

1. (a) $\dfrac{7}{\alpha} = \dfrac{\beta}{7}$ 1M

$\alpha = \dfrac{49}{\beta}$

$\log_7 \alpha = \log_7 49 - \log_7 \beta$ 1M

$= 2 - \log_7 \beta$ 1A

(b) $\log_7 \beta - \log_\beta \alpha = \log_\alpha \beta - \log_7 \beta$ 1M

$2\log_7 \beta - \dfrac{\log_7 \alpha}{\log_7 \beta} = \dfrac{\log_7 \beta}{\log_7 \alpha}$ 1M

設 $u = \log_7 \beta$。

$$2u - \frac{2-u}{u} = \frac{u}{2-u}$$ 1M

$$2u^2(2-u) - (2-u)^2 = u^2$$

$$-2u^3 + 2u^2 + 4u - 4 = 0$$

$$-2(u-1)(u^2-2) = 0$$

$u = 1$（捨去） 或 $-\sqrt{2}$（捨去） 或 $\sqrt{2}$

所求公差

$= \log_7 \beta - \log_\beta \alpha$

$= \log_7 \beta - \dfrac{\log_7 \alpha}{\log_7 \beta}$

$= \sqrt{2} - \dfrac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ 1M

$= 1$ 1A

2. (a) 公比 $= \dfrac{864}{720} = 1.2$。

設首項為 a。

$a(1.2)^2 = 720$ 1M

$a = 500$ 1A

首項為 500。

(b) $500(1.2)^n + 500(1.2)^{2n} < 5 \times 10^{14}$ 1M

$1.2^{2n} + 1.2^n - 1 \times 10^{12} < 0$

$-1\,000\,000.5 < 1.2^n < 999\,999.5$

由於 n 為正整數，

$0 < 1.2^n < 999\,999.5$

$n \log 1.2 < \log 999\,999.5$ 1M

$n < 75.8$

n 的最大值為 75。1A

3. (a) 設 a 及 r 分別為首項及公比。

$$\frac{ar^5}{ar^2} = \frac{486}{144} \qquad \text{1M}$$

$$r^3 = \frac{27}{8}$$

$$r = \frac{3}{2}$$

首項 $= a = 144 \div \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 64$。 1A

(b) $64 + 96 + \ldots + 64(1.5)^{n-1} > 8 \times 10^{18}$

$$\frac{64(1.5^n - 1)}{1.5 - 1} > 8 \times 10^{18} \qquad \text{1M}$$

$$1.5^n > 6.25 \times 10^{16} + 1$$

$$n \log 1.5 > \log\left(6.25 \times 10^{16} + 1\right) \qquad \text{1M}$$

$$n > 95.4$$

n 的最小值為 96。 1A

4. (a) 所求之和 $= \frac{[1 + 1 + (20 - 1)4]20}{2}$ 1M

$= 780$ 1A

(b) 所求之和 $= \frac{9}{1 - \frac{1}{3}}$ 1M

$= \frac{27}{2}$ 1A

5. (a) 總輸入的食水量

$= 1.5 \times 10^7 + 1.5 \times 10^7(1 - 10\%) + 1.5 \times 10^7(1 - 10\%)^2 + \ldots + 1.5 \times 10^7(1 - 10\%)^{19}$

$= \frac{1.5 \times 10^7(1 - 0.9^{20})}{1 - 0.9}$ 1M

$= 1.32 \times 10^8 \text{ m}^3$ 1A

(b) 總輸入的食水量

$< 1.5 \times 10^7 + 1.5 \times 10^7(0.9) + \ldots$

$= \frac{1.5 \times 10^7}{1 - 0.9}$ 1M

$= 1.5 \times 10^8 \text{ m}^3$

$< 1.6 \times 10^8 \text{ m}^3$

因此，同意該宣稱。 1A

6. (a) (i) 可得 $ab^2 = 254\,100$ 及 $ab^4 = 307\,461$。 1M

$$\frac{ab^4}{ab^2} = \frac{307\,461}{254\,100}$$

$$b^2 = 1.21$$

$$b = 1.1 \quad \text{或} \quad -1.1 \text{（捨去）}$$ 1A

當 $b = 1.1$ 時，$a = \dfrac{254\,100}{1.1^2} = 210\,000$。 1A

所求重量 $= (210\,000)(1.1^{2\times 4}) = 450\,153.6501$ 。 1A

(ii) 總重量 $= ab^2 + ab^4 + ab^6 + \ldots + ab^{2n}$

$$= \frac{ab^2[1-(b^2)^n]}{1-b^2}$$ 1M

$$= 1\,210\,000(1.1^{2n} - 1)$$ 1A

(b) (i) 當 m 為一正整數時，

$$\frac{A(m+4)}{B(m)} = \frac{ab^{2m+8}}{2ab^m}$$ 1M

$$= \frac{b^{m+8}}{2}$$

$$= \frac{1.1^m \cdot 1.1^8}{2}$$

$$> 1.1^m > 1 \quad \text{當 } m > 0 \text{ 時}$$

因此，對所有正整數 m，$A(m+4) > B(m)$。

同意該宣稱。 1A

(ii) 設 n 為自 X 開始運作的年數。

Y 處理的貨物的總重量

$$= 2ab + 2ab^2 + 2ab^3 + \ldots + 2ab^{n-4}$$

$$= \frac{2ab(b^{n-4}-1)}{b-1} \text{ 公噸，其中} n > 4$$

$$1\,210\,000(1.1^{2n} - 1) + \frac{420\,000(1.1)(1.1^{n-4}-1)}{1.1-1} > 20\,000\,000$$ 1M+1A

$$121(1.1^{2n}) + 462(1.1^{n-4}) - 2583 > 0$$

$$121(1.1^n)^2 + \frac{462}{1.1^4}(1.1^n) - 2583 > 0$$ 1M

$$1.1^n < -6.10 \text{（捨去）} \quad \text{或} \quad 1.1^n > 3.496831134$$

$$n \log 1.1 > \log 3.496831134$$ 1M

$$n > 13.1$$

因此，應在自 X 開始運作的第 14 年安裝新設施。 1A

7. (a) (i) 所求面積 $= 9 \times 10^6(1 + r\%) - 3 \times 10^5 \text{ m}^2$。 1A

(ii) $[9 \times 10^6(1 + r\%) - 3 \times 10^5](1 + r\%) - 3 \times 10^5 = 1.026 \times 10^7$ 1M

$$90(1 + r\%)^2 - 3(1 + r\%) - 105.6 = 0$$ 1M

$$1 + r\% = 1.1 \quad 或 \quad -\frac{16}{15} （捨去）$$

$$r = 10$$ 1A

(b) (i) 所求面積

$= 9 \times 10^6(1.1)^{n-1} - 3 \times 10^5(1.1)^{n-2} - 3 \times 10^5(1.1)^{n-3} - 3 \times 10^5(1.1)^{n-4} - \ldots - 3 \times 10^5$ 1M

$= 9 \times 10^6(1.1)^{n-1} - 3 \times 10^5 \left(\frac{1.1^{n-1} - 1}{1.1 - 1}\right)$ 1M

$= 9 \times 10^6(1.1)^{n-1} - 3 \times 10^6(1.1^{n-1} - 1)$

$= [6(1.1)^{n-1} + 3] \times 10^6 \text{ m}^2$ 1A

(ii) $[6(1.1)^{n-1} + 3] \times 10^6 > 4 \times 10^7$

$$1.1^{n-1} > \frac{37}{6}$$

$$(n-1)\log 1.1 > \log \frac{37}{6}$$ 1M

$$n > 20.09$$

所有公屋單位的總樓面面積會在第 21 年年終首次超過 $4 \times 10^7 \text{ m}^2$。 1A

(c) 根據題目，

$$\begin{cases} 1.021a + b = 1 \times 10^7 \\ 1.21^2 a + b = 1.062 \times 10^7 \end{cases}$$

求解後，可得 $a = \frac{300}{121} \times 10^6$ 及 $b = 7 \times 10^6$。 1M

$$[6(1.1)^{n-1} + 3] \times 10^6 > \left(\frac{300}{121}(1.21)^n + 7\right) \times 10^6$$

$$-\frac{300}{121}(1.21)^n + 6(1.1)^{n-1} - 4 > 0$$

$$-\frac{300}{121}(1.1^n)^2 + \frac{60}{11}(1.1)^n - 4 > 0$$ 1M

$\Delta = \left(\frac{60}{11}\right)^2 - 4\left(-\frac{300}{121}\right)(-4) = -\frac{1200}{121} < 0$

由於 $-\frac{300}{121} < 0$，對所有實數 n，$-\frac{300}{121}(1.1^n)^2 + \frac{60}{11}(1.1)^n - 4 < 0$。

所以，該不等式無解。 1M

該宣稱不正確。 1A

8. (a) (i) 所求產量 $= 8 + (3 - 1)(1)$

$= 10$ 百萬公噸 1A

(ii) 所求產量 $= 8 + (n - 1)(1)$

$= (n + 7)$ 百萬公噸 1A

(b) 所求產量 $= 8 + 9 + 10 + \dots + 32$

$= \dfrac{(8 + 32)25}{2}$ 1M

$= 500$ 百萬公噸 1A

(c) (i) 所求人口 $= 2(1 + 6\%)^{3-1}$

$= 2.2472$ 百萬 1A

(ii) 所求人口 $= 2(1 + 6\%)^{n-1}$

$= 2(1.06)^{n-1}$ 百萬 1A

(iii) $2(1.06)^n = 4$ 1M

$n \log 1.06 = \log 2$ 1M

$n \approx 11.9$

最少在 12 年內人口會增加一倍。 1A

(iv) 第 100 年年終時的糧食人均年產量

$= \dfrac{7 + 100}{2(1.06)^{99}}$ 1M+1A

≈ 0.167

< 0.2

該國會面臨糧食短缺。 1M

9. (a) (i) F_{10} 的周界 $= 8 + (10 - 1)4$ 1M

$= 44\text{ cm}$ 1A

(ii) 設正方形的數目為 n。

$8 + 12 + 16 + \dots + [8 + (n - 1)4] \le 1000$

$\dfrac{[8 + 8 + (n - 1)4]n}{2} \le 1000$ 1M

$n^2 + 3n - 500 \le 0$ 1M

$-23.9 \le n \le 20.9$

所求數目為 20。 1A

(b) (i) F_2 及 F_3 的周界分別為 12 cm 及 16 cm。

設 V_1、V_2 及 V_3 分別為 S_1、S_2 及 S_3 的體積。

$\dfrac{V_2}{V_1} = \left(\dfrac{12}{8}\right)^3$ $\quad\quad$ $\dfrac{V_3}{V_2} = \left(\dfrac{16}{12}\right)^3$ 1M

$= \dfrac{27}{8}$ $\quad\quad$ $= \dfrac{64}{27}$ 1A

由於 $\dfrac{V_2}{V_1} \ne \dfrac{V_3}{V_2}$，$S_1$、$S_2$ 與 S_3 的體積不成等比數列。 1A

(ii) S_1 的底邊長度 $= \dfrac{8}{4} = 2\text{ cm}$。

S_1 的底對角線長度 $= \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}\text{ cm}$。

S_1 的高 $= \sqrt{5^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{23}\text{ cm}$。 1M

S_1 的體積 $= \dfrac{1}{3}(2)^2\sqrt{23}$ 1M

$= \dfrac{4}{3}\sqrt{23}\text{ cm}^3$

$\dfrac{V_3}{V_1} = \left(\dfrac{16}{8}\right)^3$

$V_3 = \dfrac{4}{3}\sqrt{23} \times 8$

$= \dfrac{32}{3}\sqrt{23}\text{ cm}^3$ 1A

S_3 的體積為 $\dfrac{32}{3}\sqrt{23}\text{ cm}^3$。

10. (a) (i) 所求數目 $= 700\,000 \times 1.02$

$= 71\,400$ 1A

(ii) 所求數目 $= 70\,000(1.02)^n$ 1A

(b) $70\,000(1.02)^n > 90\,000$ 1M

$n \log 1.02 > \log \dfrac{9}{7}$ 1M

$n > 12.69$

在 2007 年，香港出生的嬰兒數目首次超過 90 000。 1A

(c) 所求數目 $= 70\,000(1.02^3 + 1.02^4 + 1.02^5 + \ldots + 1.02^{52})$

$= 70\,000(1.02^3) \times \dfrac{1.02^{50} - 1}{1.02 - 1}$ 1M+1A

$\approx 6\,280\,000$ 1A

(d) (a) 設閏年的數目為 n。

$2000 + (n - 1)(4) = 2044$

$n = 12$ 1A

1997 至 2046 年間共有 12 個閏年。

(b) 所求數目 $= 70\,000(1.02^6 + 1.02^{10} + 1.02^{14} + \ldots + 1.02^{50})$

$= 70\,000(1.02)^6 \times \dfrac{(1.02^4)^{12} - 1}{1.02^4 - 1}$ 1M+1A

$\approx 1\,520\,000$ 1A

11. (a) $500\,000(1-r\%)^{11}=284\,400$ 1M+1A

$$1-r\%=\sqrt[11]{\frac{284\,400}{500\,000}}$$

$$r\approx 5$$ 1A

(b) (i) 全年收入

$=500\,000+500\,000(0.95)+500\,000(0.95)^2+500\,000(0.95)^{11}$

$=\dfrac{500\,000(1-0.95^{12})}{1-0.95}$ 1M

$\approx \$4596399$ 1A

全年生產成本

$=400\,000+380\,000+360\,000+\ldots+[400\,000-20\,000\times 11]$

$=\dfrac{12}{2}(400\,000+180\,000)$ 1M

$=\$3\,480\,000$ 1A

由於收入較成本高，該廠全年仍有盈利。

(ii) 設該研究在第 k 個月的終結時停止。

$$300\,000k>3\,480\,000-\frac{k}{2}[2\times 400\,000-20\,000(k-1)]$$ 1M

$$30k>348-40k+k(k-1)$$

$$k^2-71k+348<0$$ 1

$$5.30<k<65.7$$ 1A

該研究會維持 6 個月。 1A

12. (a) 設 d 為公差。

$$\begin{cases} a + d = 10 \\ a + 3d = 24 \end{cases}$$ 1M

求解後，可得 $d = 7$。

因此，$a = 3$ 及 $b = 17$。 1A+1A

(b) (i) 所求稅額 $= 0.2P$。 1A

(ii) 設 $\$P$ 為該市民的總入息實額。

$$0.2P \le 30\,000(3\% + 10\% + 17\%) + (P - 172\,000 - 90\,000)(24\%)$$ 1M+1A

$$0.2P \le -53\,880 + 0.24P$$

$$P \ge 1\,347\,000$$

最低總入息實額為 $\$1\,347\,000$。 1A

(c) 應繳薪俸稅 $= 0.2(1\,347\,000)$ 1M

$= \$280\,000$

存款總額

$$= 23\,000\left(1 + \frac{3\%}{12}\right)^{12} + 23\,000\left(1 + \frac{3\%}{12}\right)^{11} + \ldots + 23\,000\left(1 + \frac{3\%}{12}\right)$$ 1M

$$= \frac{23\,000(1.0025)(1.00025^{12} - 1)}{1.0025 - 1}$$ 1M

$\approx 280\,526$

$> 280\,000$

因此，他在到期日時有足夠的款項繳交他的薪俸稅。 1A

13. (a) 公比 $= \dfrac{b}{a}$。 1A

首 n 項之和 $= \dfrac{a^n\left[1-\left(\frac{b}{a}\right)^n\right]}{1-\frac{b}{a}}$ 1M

$= \dfrac{a(a^n-b^n)}{a-b}$ 1A

(b) (i) 他的戶口在

(1) 第一年年尾的結存 $= \$1.08P$ 1A

(2) 第二年年尾的結存 $= \$(1.08^2P + 1.1\times 1.08P)$ 1A

(3) 第三年年尾的結存 $= \$(1.08^3P + 1.1\times 1.08^2P + 1.1^2\times 1.08P)$ 1A

(ii) 第 n 年年尾的結存

$= P[1.08^n + 1.08^{n-1}\times 1.1 + 1.08^{n-2}\times 1.1^2 + \ldots + 1.08\times 1.1^{n-1}]$

$= P\times \dfrac{1.08(1.08^n-1.1^n)}{1.08-1.1}$ 2A

$= \$54P(1.1^n - 1.08^n)$ 1

(c) 在 n 年後，該樓宇價值為 $\$1\,080\,000\times 1.15^n$。 1A

代 $P = 20\,000$，

$$\begin{aligned}\text{那人戶口的結存} &= 1\,080\,000(1.1^n-1.08^n)\\ &< \$1\,080\,000\times 1.15^n\end{aligned}$$ 1A

14. (a) (i) 首月貸款利息 $= 200\,000\left(\dfrac{6\%}{12}\right) = \$1000$。 1A

(ii) 所求金額 $= 200\,000\left(1+\dfrac{6\%}{12}\right) - x$ 1M

$= \$(201\,000 - x)$ 1A

(iii) 所求金額 $= 200\,000(1.005)^n - x(1.005)^{n-1} - x(1.005)^{n-2} - \ldots - x$ 1A

$= 200\,000(1.005)^n - x(1.005^{n-1} + 1.005^{n-2} + \ldots + 1)$

$= 200\,000(1.005)^n - x\left(\dfrac{1.005^n-1}{1.005-1}\right)$ 1M

$= \$\{200\,000(1.005)^n - 200x[(1.005)^n - 1]\}$ 1

(b) (i) 設所需時間為 n 個月。

$$200\,000(1.005)^n - 200(1800)[(1.005)^n-1] \le 0$$ 1M

$$360\,000 \le 160000(1.005)^n$$

$$1.005^n \ge 2.25$$

$$n\log 1.005 \ge \log 2.25$$ 1M

$$n \ge 162.6$$

所求月數為 163。 1A

(ii) 據 (a)(i)，每月還款 (\$900) 少於首月的貸款利息 (\$1000)。 1M

該貸款將永不能被完全清還。 1A

因此，該銀行拒絕他的要求。

15. (a) (i)

	$A_1 \rightarrow A_2$	$A_2 \rightarrow A_3$	$A_3 \rightarrow A_4$	
所加正方形的數目	3	9	27	1A
所加正方形的邊長	$\frac{\ell}{3}$	$\frac{\ell}{9}$	$\frac{\ell}{27}$	1A

(ii) A_4 中所有正方形的總面積

$= \ell^2 + 3\left(\frac{\ell}{3}\right)^2 + 9\left(\frac{\ell}{9}\right)^2 + 27\left(\frac{\ell}{27}\right)^2$ 1M+1A

$= \frac{40}{27}\ell^2$ 1A

(iii) $k = \ell^2\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \ldots\right)$

$= \frac{1}{1 - \frac{1}{3}}\ell^2$ 1A

$= \frac{3}{2}\ell^2$ 1A

(b) (i)

	B_1	B_2	B_3	B_4	
周界	4ℓ	6ℓ	8ℓ	10ℓ	3A

(ii) B_n 的周界$B_n = 4\ell + (n-1)(2\ell)$

$= 2(n+1)\ell$ 1A

若 n 不斷增大，B_n 的周界會趨向無限大。 1A

16. (a) $\triangle C_1C_2C_3$ 的面積 $= \frac{1}{2}(1)(1)\sin 60°$ 1A

$= \frac{\sqrt{3}}{4}\text{ m}^2$ 1A

(b) 每個小三角形的面積 $= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^3 \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{36}\text{ m}^2$。

總面積 $= 4 \times \frac{\sqrt{3}}{36} + \frac{\sqrt{3}}{4}$ 1M+1M

$= \frac{13\sqrt{3}}{36}\text{ m}^2$ 1A

(c) 總面積 $= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{4}{9} \times \frac{\sqrt{3}}{4} + \left(\frac{4}{9}\right)^2 \times \frac{\sqrt{3}}{4} + \left(\frac{4}{9}\right)^3 \times \frac{\sqrt{3}}{4} + \ldots$ 1M+1A

$= \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)}{1 - \frac{4}{9}}$ 1M

$= \frac{9\sqrt{3}}{20}\text{ m}^2$ 1A

17. (a) $A_2B_2 = \sqrt{6^2 + 8^2}$ 1M

$= 10\text{ cm}$ 1A

(b) $A_2A_3 : A_1A_2 = 10 \times \dfrac{3}{7} : 6$ 1M

$= 5 : 7$ 1A

(c) $A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_4 + \ldots = 6\left[1 + \dfrac{5}{7} + \left(\dfrac{5}{7}\right)^2 + \ldots\right]$ 1M

$= 6 \times \dfrac{1}{1 - \frac{5}{7}}$ 1A

$= 21\text{ cm}$ 1

該螞蟻所爬行的總距離不能大於 21 cm。

18. (a) (i) 三角形$A_1B_0B_1$ 的面積 $= \dfrac{1}{2}(k)(1-k)\sin 60°$ 1M

$= \dfrac{\sqrt{3}}{4}k(1-k)\text{ m}^2$ 1A

(ii) $x^2 = k^2 + (1-k)^2 - 2(k)(1-k)\cos 60°$ 1M

$x^2 = 3k^2 - 3k + 1$

$x = \sqrt{3k^2 - 3k + 1}$ 1A

(iii) $\triangle A_1B_0B_1$、$\triangle B_1C_0C_1$ 與 $\triangle C_1A_0A_1$ 為全等三角形。

因此，$A_1B_1 = B_1C_1 = C_1A_1 = x$ m 及 $\triangle A_1B_1C_1$ 為一個等邊三角形。 1

(b) (i) $\dfrac{A_2B_1}{A_1B_0} = \dfrac{x(1-k)}{1-k} = x$

$\dfrac{B_1B_1}{B_1B_0} = \dfrac{xk}{k} = x = \dfrac{A_2B_1}{A_1B_0}$

$\angle A_2B_1B_2 = 60° = \angle A_1B_0B_1$ （等邊 △ 性質）

$\triangle A_1B_0B_1 \sim \triangle A_2B_1B_2$ （兩邊成比例且夾角相等）

評分標準		
情況 1	附有正確理由的任何正確證明。	2
情況 2	未附有正確理由的任何正確證明。	1

(ii) 總面積

$= \dfrac{\sqrt{3}}{4}k(1-k) + \dfrac{\sqrt{3}}{4}xk[x(1-k)] + \dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2k[x^2(1-k)] + \ldots$ 1M

$= \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{4}k(1-k)}{1-x^2}$ 1M

$= \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{4}k(1-k)}{1-(3k^2-3k+1)}$ 1M

$= \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{4}k(1-k)}{3k(1-k)}$

$= \dfrac{\sqrt{3}}{12}\text{ m}^2$ 1A

19. (a) $d_3 = 0.9d_1 = 7.2$ 1A

$d_5 = d_3 \times 0.9 = 6.48$ 1A

$d_{2n-1} = 8(0.9)^{n-1}$ 2A

(b) $d_6 = 10 \times 0.9^2 = 8.1$ 1A

$d_{2n} = 10 \times 0.9^{n-1}$ 1A

(c) (i) $d_1 + d_3 + d_5 + \ldots + d_{2n-1} = 8 + 8(0.9) + 8(0.9)^2 + \ldots + 8(0.9)^{n-1}$

$= \dfrac{8(1-0.9^n)}{1-0.9}$ 1M

$= 80(1-0.9^n)$ 1A

(ii) $d_2 + d_4 + d_6 + \ldots + d_{2n} = 10 + 10(0.9) + 10(0.9)^2 + \ldots + 10(0.9)^{n-1}$

$= \dfrac{10(1-0.9^n)}{1-0.9}$

$= 100(1-0.9^n)$ 1A

(d) $d_0 + d_1 + d_2 + d_3 + \ldots = 10 + (d_1 + d_3 + d_5 + \ldots) + (d_2 + d_4 + d_6 + \ldots)$ 1M

$= 10 + \dfrac{8}{1-0.9} + \dfrac{10}{1-0.9}$ 1M

$= 190$ 1A

20. (a) (i) D 的坐標為 $(-6,\ 8)$。 1A

圓心的坐標 $= \left(\dfrac{-6+8}{2},\ \dfrac{6+8}{2}\right)$ 1M

$= (1,\ 7)$ 1A

(ii) 圓 $ABCD$ 的半徑 $= \sqrt{(1-0)^2 + (7-0)^2}$ 1M

$= 5\sqrt{2}$ 1A

(b) (i) 圓 $A_1B_1C_1D_1$ 的半徑 $= 5\sqrt{2}\sin 45° = 5$. 1M

所求之比 $= 5^2 : (5\sqrt{2})^2$ 1M

$= 1 : 2$ 1A

(ii) 陰影區域總面積

$= \left(10^2 - \pi\left(\dfrac{10}{2}\right)^2\right) + \dfrac{1}{2}\left(10^2 - \pi\left(\dfrac{10}{2}\right)^2\right) + \ldots + \left(\dfrac{1}{2}\right)^9\left(10^2 - \pi\left(\dfrac{10}{2}\right)^2\right)$

$= (100 - 25\pi)\left[1 + \dfrac{1}{2} + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\dfrac{1}{2}\right)^9\right]$

$= (100 - 25\pi) \times \dfrac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{1 - \frac{1}{2}}$ 1M

≈ 42.8784529

所以，$p \approx \dfrac{42.8784529}{\pi(5\sqrt{2})^2} \approx 0.273$。 1M

因此，該設計是精美的。 1A

多項選擇題

1. $\boxed{\text{B}}$ (59.8%)

   I. ✓。公比 $= 2^m$。

   II. ✗。$\dfrac{2m^2}{m} = 2m$，但 $\dfrac{3m^4}{2m^2} = \dfrac{3m^2}{2} \neq 2m$。

   III. ✓。數列：$\log m, 2\log m, 4\log m, 8\log m$。公比 $= 2$。

2. $\boxed{\text{C}}$ (40.6%)

   設首項及公比分別為 a 及 r。

$$\begin{cases} ar + ar^4 = 9 \\ ar^6 + ar^9 = 288 \end{cases}$$

$$\frac{288}{9} = \frac{ar^6(1+r^3)}{ar(1+r^3)}$$

$$r^5 = 32$$

$$r = 2$$

   當 $r = 2$ 時，$a = \dfrac{9}{r+r^4} = \dfrac{1}{2}$。第 20 項 $= ar^{19} = 262\,144$。

3. $\boxed{\text{D}}$ (44.0%)

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2}$$

$$\frac{1}{8p^2} = \frac{27p}{1}$$

$$\frac{1}{216} = p^3$$

$$p = \frac{1}{6}$$

   可得 $a_1 = \dfrac{2}{9}$、$a_2 = 1$ 及 $a_3 = \dfrac{9}{2}$。

   公比為 $\dfrac{9}{2}$。

   $a_4 = a_3 \times \dfrac{9}{2} = \dfrac{81}{4}$

4. $\boxed{\text{A}}$ (54.0%)

   設公比為 R。

   I. ✓。$ps = p(pR^3) = p^2R^3$ 及 $qr = (pR)(pR^2) = p^2R^3 = ps$

   II. ✗。取等比數列 1, 2, 4, 8 為例。
   $p + s = 9$ 及 $q + r = 6 \neq 9$。

   III. ✗。取等比數列 1, −2, 4, −8 為例。
   不等式 $p < q < r < s$ 為錯誤。

5. $\boxed{\text{D}}$ (26.6%)

設首項及公比分別為 a 及 r。

$$\frac{ar^7}{ar^5} = \frac{96}{216}$$
$$r^2 = \frac{4}{9}$$
$$r = \pm\frac{2}{3}$$

I. ✗。當 $r = -\frac{2}{3}$ 時，$x_3 = \frac{x_6}{r^3} < 0$。$x_3$ 不一定等於 729。

II. ✓。$\frac{x_5}{x_7} = \frac{1}{r^2} = \frac{9}{4} > 1$。

III. ✓。$x_2 = \frac{x_6}{r^4} = \frac{2187}{2}$，公比 $= \frac{x_4}{x_2} = r^2$。

$$x_2 + x_4 + x_6 + \ldots + x_{2n} = \frac{2187}{2} \times \frac{1-(r^2)^n}{1-r^2} = 1968.3\left[1-\left(\frac{4}{9}\right)^n\right] < 1968.3 < 2015$$。

6. $\boxed{\text{B}}$ (34.5%)

設公比為 r。

$$\frac{189}{21} = \frac{ar^6}{ar^2}$$
$$r^4 = 9$$
$$r^2 = 3$$
$$r = \pm\sqrt{3}$$

I. ✗。

II. ✓。

當 $r = \sqrt{3}$，項 $a_4 = 21\sqrt{3}$ 為無理數。

III. ✗。

當 $r = -\sqrt{3}$，可得 $a_1 = \frac{21}{r^2} = 7$。

$$\begin{aligned}\text{所求之和} &= \frac{7[1-(-\sqrt{3})^{99}]}{1-(-\sqrt{3})} \\ &\approx 1.06 \times 10^{24} \\ &< 3 \times 10^{24}\end{aligned}$$

7. $\boxed{\text{A}}$ (40%)

設首項及公比分別為 a 及 r。

$$\frac{ar^8}{ar^6}=\frac{8}{32}$$
$$r^2=\frac{1}{4}$$
$$r=\pm\frac{1}{2}$$

I. ✓。$a_1=\dfrac{a_7}{r^6}>0$。

II. ✓。$a_1-a_2=a_1(1-r)>0$ （由於 $a_1>0$ 及 $1-r>0$）。

III. ✗。若 $r=\dfrac{1}{2}$，則所有項均為正值，其總和必為正值，學生毋須計算結果。

若 $r=-\dfrac{1}{2}$，$a_2+a_3+\ldots+a_{100}=\dfrac{a_1r(1-r^{99})}{1-r}=\dfrac{\oplus\ominus(\oplus)}{\oplus}<0$。

（由於 $a_1>0$、$r<0$、$1-r>0$ 及 $1-r^{99}>0$）

8. $\boxed{\text{A}}$

設首項及公比分別為 a 及 r。

$$\begin{cases}\dfrac{a}{1-r}=\dfrac{81}{4}\\ ar=-9\end{cases}$$

$$ar\div\frac{a}{1-r}=-9\div\frac{81}{4}$$
$$r(1-r)=-\frac{4}{9}$$
$$-r^2+r+\frac{4}{9}=0$$
$$r=-\frac{1}{3}\quad\text{或}\quad\frac{4}{3}\text{（捨去）}$$

9. $\boxed{\text{C}}$

設公比為 r。

$$\frac{\frac{3}{2}}{1-r}=2$$
$$r=\frac{1}{4}$$

10. $\boxed{\text{A}}$

設公比為 r。

$$\frac{a}{1-r}=\frac{3}{4}a$$
$$r=-\frac{1}{3}$$

11. $\boxed{\text{D}}$

無限項之和 $= \dfrac{-1}{1-\left(-\frac{1}{x}\right)} = \dfrac{-x}{x+1}$.

12. $\boxed{\text{E}}$

設首項及公比分別為 a 及 r。

$$\begin{cases} a + ar = 3 \\ \dfrac{a}{1-r} = 4 \end{cases}$$

$$\frac{a(1+r)}{\left(\frac{a}{1-r}\right)} = \frac{3}{4}$$

$$1 - r^2 = \frac{3}{4}$$

$$r = \pm\frac{1}{2}$$

13. $\boxed{\text{C}}$ (42%)

首項 = 4，公比 = $\dfrac{1}{4}$。

所求之和 $= \dfrac{4}{1-\frac{1}{4}} = \dfrac{16}{3}$。

14. $\boxed{\text{C}}$ (25.6%)

$$\text{所求概率} = \frac{1}{6} + \left(\frac{4}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{4}{6}\right)^4\left(\frac{1}{6}\right) + \ldots$$

$$= \frac{\frac{1}{6}}{1-\left(\frac{4}{6}\right)^2}$$

$$= \frac{3}{10}$$

15. $\boxed{\text{B}}$ (29.7%)

所求概率

$$= \left(\frac{3}{7}\right)\left(\frac{2}{7}\right) + \left(\frac{3}{7}\right)^3\left(\frac{2}{7}\right) + \left(\frac{3}{7}\right)^5\left(\frac{2}{7}\right) + \ldots$$

$$= \frac{\left(\frac{3}{7}\right)\left(\frac{2}{7}\right)}{1-\left(\frac{3}{7}\right)^2}$$

$$= \frac{3}{20}$$

– 試卷完 –