

1. 當 $n = 1$,

$$\text{左式} = 1 \times 2 = 2, \text{右式} = 1^2(1+1) = 2 = \text{左式}$$

對 $n = 1$, 命題為真。

1

假設 $1 \times 2 + 2 \times 5 + 3 \times 8 + \dots + k(3k-1) = k^2(k+1)$, 其中 $k \in \mathbb{Z}^+$ 。

1M

$$1 \times 2 + 2 \times 5 + 3 \times 8 + \dots + k(3k-1) + (k+1)(3k+2)$$

$$= k^2(k+1) + (k+1)(3k+2)$$

1

$$= (k+1)[k^2 + (3k+2)]$$

$$= (k+1)^2(k+2)$$

1

對 $n = k+1$, 命題為真。

藉數學歸納法, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, 命題為真。

1

2. 當 $n = 1$,

$$\text{左式} = 1 + \frac{1}{1 \times 4} = \frac{5}{4}, \text{右式} = \frac{4+1}{3+1} = \frac{5}{4} = \text{左式}$$

對 $n = 1$, 命題為真。

1

假設 $1 + \frac{1}{1 \times 4} + \frac{1}{4 \times 7} + \dots + \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{4k+1}{3k+1}$, 其中 $k \in \mathbb{Z}^+$ 。

1M

$$1 + \frac{1}{1 \times 4} + \frac{1}{4 \times 7} + \dots + \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} + \frac{1}{(3k+1)(3k+4)}$$

$$= \frac{4k+1}{3k+1} + \frac{1}{(3k+1)(3k+4)}$$

1

$$= \frac{12k^2 + 19k + 5}{(3k+1)(3k+4)}$$

$$= \frac{(3k+1)(4k+5)}{(3k+1)(3k+4)}$$

$$= \frac{4k+5}{3k+4}$$

1

對 $n = k+1$, 命題為真。

藉數學歸納法, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, 命題為真。

1

3. 當 $n = 1$,

$$\text{左式} = 3(1)^5 + 1^3 = 4, \text{右式} = \frac{1(1+1)^3}{2} = 4 = \text{左式}$$

對 $n = 1$, 命題為真。

1

$$\text{假設 } \sum_{k=1}^p (3k^5 + k^3) = \frac{p^3(p+1)^3}{2}, \text{ 其中 } p \in \mathbb{Z}^+.$$

1M

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{p+1} (3k^5 + k^3) &= \sum_{k=1}^p (3k^5 + k^3) + 3(p+1)^5 + (p+1)^3 \\ &= \frac{p^3(p+1)^3}{2} + (p+1)^3[3(p+1)^2 + 1] \\ &= \frac{(p+1)^3}{2} [p^3 + 2(3p^2 + 6p + 4)] \\ &= \frac{(p+1)^3(p+2)(p^2 + 4p + 4)}{2} \\ &= \frac{(p+1)^3(p+2)^3}{2} \end{aligned}$$

1M

1M

對 $n = p + 1$, 命題為真。

藉數學歸納法, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, 命題為真。

1

4. (a) 當 $n = 1$,

$$\text{左式} = (-1)(1)^2 = -1, \text{右式} = \frac{(-1)(1)(2)}{2} = -1 = \text{左式}$$

對 $n = 1$, 命題為真。

1

$$\text{假設 } \sum_{k=1}^p (-1)^k k^2 = \frac{(-1)^p p(p+1)}{2}, \text{ 其中 } p \in \mathbb{Z}^+.$$

1M

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{p+1} (-1)^k k^2 &= \sum_{k=1}^p (-1)^k k^2 + (-1)^{p+1} (p+1)^2 \\ &= \frac{(-1)^p p(p+1)}{2} + (-1)^{p+1} (p+1)^2 \\ &= \frac{(-1)^{p+1} (p+1)}{2} [-p + (p+1)] \\ &= \frac{(-1)^{p+1} (p+1)}{2} \end{aligned}$$

1M

對 $n = p + 1$, 命題為真。

藉數學歸納法, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, 命題為真。

1

$$\begin{aligned} \text{(b) } \sum_{k=3}^{333} (-1)^{k+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{333} (-1)^{k+1} k^2 - \sum_{k=1}^2 (-1)^{k+1} k^2 \\ &= - \sum_{k=1}^{333} (-1)^k k^2 - [(-1)^2(1)^2 + (-1)^3(2)^2] \\ &= - \frac{(-1)^{333}(333)(334)}{2} - (1 - 4) \\ &= 55\,614 \end{aligned}$$

1M

1A

5. (a) 當 $n = 1$,

$$\text{左式} = (1)(5) = 5, \text{右式} = \frac{1(2)(15)}{6} = 5 = \text{左式}$$

對 $n = 1$, 命題為真。

1

$$\text{假設 } \sum_{k=1}^p k(k+4) = \frac{p(p+1)(2p+13)}{6}, \text{ 其中 } p \in \mathbb{Z}^+.$$

1M

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{p+1} k(k+4) &= \sum_{k=1}^p k(k+4) + (p+1)(p+5) \\ &= \frac{p(p+1)(2p+13)}{6} + (p+1)(p+5) \\ &= \frac{p+1}{6} (2p^2 + 19p + 30) \\ &= \frac{(p+1)(p+2)(2p+15)}{6} \end{aligned}$$

1M

對 $n = p + 1$, 命題為真。

藉數學歸納法, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, 命題為真。

1

$$(b) \sum_{k=333}^{555} \left(\frac{k}{112} \right) \left(\frac{k+4}{223} \right) = \frac{1}{24976} \left(\sum_{k=1}^{555} k(k+4) - \sum_{k=1}^{332} k(k+4) \right)$$

1M

$$= \frac{1}{24976} \left[\frac{(555)(556)(1123)}{6} - \frac{(332)(333)(677)}{6} \right]$$

1M

$$= 1813$$

1A

6. (a) 當 $n = 1$,

$$\text{左式} = (-1)^1(1)^2 + (-1)^2(2)^2 = 3, \text{右式} = 1(2+1) = 3 = \text{左式}$$

對 $n = 1$, 命題為真。

1

$$\text{假設 } \sum_{k=1}^{2p} (-1)^k k^2 = p(2p+1), \text{ 其中 } p \in \mathbb{Z}^+.$$

1M

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2(p+1)} (-1)^k k^2 &= \sum_{k=1}^{2p} (-1)^k k^2 + (-1)^{2p+1} (2p+1)^2 + (-1)^{2p+2} (2p+2)^2 \\ &= p(2p+1) - (2p+1)^2 + (2p+2)^2 \\ &= 2p^2 + 5p + 3 \\ &= (p+1)[2(p+1) + 1] \end{aligned}$$

1M

對 $n = p + 1$, 命題為真。

藉數學歸納法, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, 命題為真。

1

$$(b) \sum_{k=11}^{100} (-1)^k k^2 = \sum_{k=1}^{2(50)} (-1)^k k^2 - \sum_{k=1}^{2(5)} (-1)^k k^2$$

1M

$$= 50[2(50) + 1] - 5[2(5) + 1]$$

1M

$$= 4995$$

1A

7. (a) 當 $n = 1$,

$$\text{左式} = \sum_{k=1}^2 \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}, \text{右式} = \frac{1+1}{1(2+1)} = \text{左式}$$

對 $n = 1$, 命題為真。

1

$$\text{假設} \sum_{k=p}^{2p} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{p+1}{p(2p+1)}, \text{其中 } p \in \mathbb{Z}^+。$$

1M

$$\sum_{k=p+1}^{2p+2} \frac{1}{k(k+1)}$$

$$= \sum_{k=p}^{2p} \frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{p(p+1)} + \frac{1}{(2p+1)(2p+2)} + \frac{1}{(2p+2)(2p+3)}$$

1M

$$= \frac{p+1}{p(2p+1)} - \frac{1}{p(p+1)} + \frac{4p+4}{(2p+1)(2p+2)(2p+3)}$$

1M

$$= \frac{(p+1)^2 - (2p+1)}{p(p+1)(2p+1)} + \frac{2}{(2p+1)(2p+3)}$$

$$= \frac{2p^2 + 5p + 2}{(p+1)(2p+1)(2p+3)}$$

$$= \frac{(2p+1)(p+2)}{(p+1)(2p+1)(2p+3)}$$

$$= \frac{p+2}{(p+1)(2p+3)}$$

對 $n = p+1$, 命題為真。

藉數學歸納法, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, 命題為真。

1

$$(b) \sum_{k=50}^{200} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=100}^{200} \frac{1}{k(k+1)} + \sum_{k=50}^{100} \frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{100(101)}$$

$$= \frac{101}{100(201)} + \frac{51}{50(101)} - \frac{1}{10 \cdot 100}$$

1M

$$= \frac{151}{10050}$$

1A

8. (a) When $n = 1$,

$$\text{左式} = \frac{1}{1(2)(3)} = \frac{1}{6}, \text{右式} = \frac{1(4)}{4(2)(3)} = \frac{1}{6} = \text{左式}$$

對 $n = 1$ ，命題為真。

$$\text{假設} \sum_{k=1}^p \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{p(p+3)}{4(p+1)(p+2)}, \text{其中 } p \in \mathbb{Z}^+。$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{p+1} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \sum_{k=1}^p \frac{1}{k(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(p+1)(p+2)(p+3)} \\ &= \frac{p(p+3)}{4(p+1)(p+2)} + \frac{1}{(p+1)(p+2)(p+3)} \\ &= \frac{(p^2+3p)(p+3)+4}{4(p+1)(p+2)(p+3)} \\ &= \frac{p^3+6p^2+9p+4}{4(p+1)(p+2)(p+3)} \\ &= \frac{(p+1)^2(p+4)}{4(p+1)(p+2)(p+3)} \\ &= \frac{(p+1)(p+4)}{4(p+2)(p+3)} \end{aligned}$$

對 $n = p+1$ ，命題為真。

藉數學歸納法， $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ ，命題為真。

$$\begin{aligned} \text{(b)} \sum_{k=4}^{123} \frac{50}{k(k+1)(k+2)} &= 50 \sum_{k=1}^{123} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} - 50 \sum_{k=1}^3 \frac{1}{k(k+1)(k+2)} \\ &= 50 \times \frac{123(126)}{4(124)(125)} - 50 \times \frac{3(6)}{4(4)(5)} \\ &= \frac{387}{310} \end{aligned}$$

9. 當 $n = 1$ ，

$$\text{左式} = \frac{1}{1 \times 2} = \frac{1}{2}, \text{右式} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} = \text{左式}$$

對 $n = 1$ ，命題為真。

$$\text{假設} \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}, \text{其中 } k \in \mathbb{Z}^+。$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} &= \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{k+1}{k+2} \end{aligned}$$

對 $n = k+1$ ，命題為真。

藉數學歸納法， $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ ，命題為真。

10. 當 $n = 1$,

$$\text{左式} = \frac{1}{1 \times 4} = \frac{1}{4}, \text{右式} = \frac{1}{3+1} = \frac{1}{4} = \text{左式}$$

對 $n = 1$, 命題為真。

$$\text{假設 } \frac{1}{1 \times 4} + \frac{1}{4 \times 7} + \frac{1}{7 \times 10} + \dots + \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{k}{3k+1}, \text{其中 } k \in \mathbb{Z}^+。$$

$$\frac{1}{1 \times 4} + \frac{1}{4 \times 7} + \frac{1}{7 \times 10} + \dots + \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} + \frac{1}{(3k+1)(3k+4)}$$

$$= \frac{k}{3k+1} + \frac{1}{(3k+1)(3k+4)}$$

$$= \frac{k(3k+4)+1}{(3k+1)(3k+4)}$$

$$= \frac{(3k+1)(k+1)}{(3k+1)(3k+4)}$$

$$= \frac{k+1}{3k+4}$$

對 $n = k+1$, 命題為真。

藉數學歸納法, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, 命題為真。

11. 當 $n = 1$,

$$\text{左式} = 1^2 = 1, \text{右式} = \frac{1(1)(3)}{3} = 1 = \text{左式}$$

對 $n = 1$, 命題為真。

$$\text{假設 } 1^2 + 3^2 + \dots + (2k-1)^2 = \frac{k(2k-1)(2k+1)}{3}, \text{其中 } k \in \mathbb{Z}^+。$$

$$1^2 + 3^2 + \dots + (2k-1)^2 + (2k+1)^2$$

$$= \frac{k(2k-1)(2k+1)}{3} + (2k+1)^2$$

$$= \frac{2k+1}{3} [k(2k-1) + 3(2k+1)]$$

$$= \frac{2k+1}{3} (2k^2 + 5k + 3)$$

$$= \frac{(k+1)(2k+1)(2k+3)}{3}$$

對 $n = k+1$, 命題為真。

藉數學歸納法, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, 命題為真。

12. 當 $n = 1$,

$$\text{左式} = 1 \times 2 \times 3 = 6, \text{右式} = \frac{(1)(2)(3)(4)}{4} = 6 = \text{左式}$$

對 $n = 1$, 命題為真。

$$\text{假設 } 1 \times 2 \times 3 + 2 \times 3 \times 4 + \dots + k(k+1)(k+2) = \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4}, \text{其中 } k \in \mathbb{Z}^+。$$

$$1 \times 2 \times 3 + 2 \times 3 \times 4 + \dots + k(k+1)(k+2) + (k+1)(k+2)(k+3)$$

$$= \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4} + (k+1)(k+2)(k+3)$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4}$$

對 $n = k + 1$, 命題為真。

藉數學歸納法, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, 命題為真。

13. 當 $n = 1$,

$$\text{左式} = T_1 = 1^2 + 1 = 2, \text{右式} = \frac{1}{3}(1)(2)(3) = 2 = \text{左式}$$

對 $n = 1$, 命題為真。

$$\text{假設 } T_1 + T_2 + \dots + T_k = \frac{1}{3}k(k+1)(k+2), \text{其中 } k \in \mathbb{Z}^+。$$

$$T_1 + T_2 + \dots + T_k + T_{k+1} = \frac{1}{3}k(k+1)(k+2) + (k+1)^2 + (k+1)$$

$$= \frac{1}{3}(k+1)[k(k+2) + 3(k+1) + 3]$$

$$= \frac{1}{3}(k+1)(k^2 + 5k + 6)$$

$$= \frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3)$$

對 $n = k + 1$, 命題為真。

藉數學歸納法, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, 命題為真。

14. 當 $n = 1$,

$$\text{左式} = 1 \times 2 = 2, \text{右式} = 1^2(2) = 2 = \text{左式}$$

對 $n = 1$, 命題為真。

$$\text{假設 } 1 \times 2 + 2 \times 5 + 3 \times 8 + \dots + k(3k-1) = k^2(k+1), \text{其中 } k \in \mathbb{Z}^+。$$

$$1 \times 2 + 2 \times 5 + 3 \times 8 + \dots + k(3k-1) + (k+1)(3k+2)$$

$$= k^2(k+1) + (k+1)(3k+2)$$

$$= (k+1)[k^2 + (3k+2)]$$

$$= (k+1)^2(k+2)$$

對 $n = k + 1$, 命題為真。

藉數學歸納法, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, 命題為真。

15. 當 $n = 1$,

$$\text{左式} = 1^2 \times 2 = 2, \text{右式} = \frac{1(2)(3)(4)}{12} = 2 = \text{左式}$$

對 $n = 1$, 命題為真。

$$\text{假設 } 1^2 \times 2 + 2^2 \times 3 + \dots + k^2(k+1) = \frac{k(k+1)(k+2)(3k+1)}{12}, \text{其中 } k \in \mathbb{Z}^+。$$

$$1^2 \times 2 + 2^2 \times 3 + \dots + k^2(k+1) + (k+1)^2(k+2)$$

$$= \frac{k(k+1)(k+2)(3k+1)}{12} + (k+1)^2(k+2)$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)}{12} [k(3k+1) + 12(k+1)]$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)}{12} (3k^2 + 13k + 12)$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)(3k+4)}{12}$$

對 $n = k + 1$, 命題為真。

藉數學歸納法, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, 命題為真。

16. 當 $n = 1$,

$$\text{左式} = \frac{1}{2}, \text{右式} = 3 - \frac{2+3}{2} = \frac{1}{2} = \text{左式}$$

對 $n = 1$, 命題為真。

$$\text{假設 } \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \dots + \frac{2k-1}{2^k} = 3 - \frac{2k+3}{2^k}, \text{其中 } k \in \mathbb{Z}^+。$$

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \dots + \frac{2k-1}{2^k} + \frac{2k+1}{2^{k+1}} = 3 - \frac{2k+3}{2^k} + \frac{2k+1}{2^{k+1}}$$

$$= 3 - \frac{2(2k+3) - (2k+1)}{2^{k+1}}$$

$$= 3 - \frac{2k+5}{2^{k+1}}$$

對 $n = k + 1$, 命題為真。

藉數學歸納法, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, 命題為真。

17. 當 $n = 1$,

左式 $= T_1 = (1^2 + 1)(1!) = 2$, 右式 $= 1(2!) = 2 =$ 左式

對 $n = 1$, 命題為真。

假設 $T_1 + T_2 + \dots + T_k = k[(k+1)!]$, 其中 $k \in \mathbb{Z}^+$ 。

$$\begin{aligned} T_1 + T_2 + \dots + T_k + T_{k+1} &= k[(k+1)!] + [(k+1)^2 + 1][(k+1)!] \\ &= (k+1)![k + (k^2 + 2k + 2)] \\ &= (k+1)!(k^2 + 3k + 2) \\ &= (k+1)!(k+1)(k+2) \\ &= (k+1)[(k+2)!] \end{aligned}$$

對 $n = k+1$, 命題為真。

藉數學歸納法, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, 命題為真。

18. 當 $n = 1$,

左式 $= 1 \times 2 = 2$, 右式 $= 2^1(1) = 2 =$ 左式

對 $n = 1$, 命題為真。

假設 $1 \times 2 + 2 \times 3 + 2^2 \times 4 + \dots + 2^{k-1}(k+1) = 2^k(k)$, 其中 $k \in \mathbb{Z}^+$ 。

$$\begin{aligned} 1 \times 2 + 2 \times 3 + 2^2 \times 4 + \dots + 2^{k-1}(k+1) + 2^k(k+2) \\ &= 2^k(k) + 2^k(k+2) \\ &= 2^k[k + (k+2)] \\ &= 2^{k+1}(k+1) \end{aligned}$$

對 $n = k+1$, 命題為真。

藉數學歸納法, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, 命題為真。

19. 當 $n = 1$,

左式 $= 1^2 = 1$, 右式 $= (-1)^0 \frac{1(2)}{2} = 1 =$ 左式

對 $n = 1$, 命題為真。

假設 $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + (-1)^{k-1}k^2 = (-1)^{k-1} \frac{k(k+1)}{2}$, 其中 $k \in \mathbb{Z}^+$ 。

$$\begin{aligned} 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + (-1)^{k-1}k^2 + (-1)^k(k+1)^2 \\ &= (-1)^{k-1} \frac{k(k+1)}{2} + (-1)^k(k+1)^2 \\ &= \frac{(-1)^k(k+1)}{2} [-k + 2(k+1)] \\ &= (-1)^k \frac{(k+1)(k+2)}{2} \end{aligned}$$

對 $n = k+1$, 命題為真。

藉數學歸納法, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, 命題為真。

20. 當 $n = 1$,

$$\text{左式} = \frac{1}{2}, \text{右式} = 2 - \frac{1+2}{2} = \frac{1}{2} = \text{左式}$$

對 $n = 1$, 命題為真。

假設 $\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{k+2}{2^k}$, 其中 $k \in \mathbb{Z}^+$ 。

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{k}{2^k} + \frac{k+1}{2^{k+1}}$$

$$= 2 - \frac{k+2}{2^k} + \frac{k+1}{2^{k+1}}$$

$$= 2 - \frac{2(k+2) - (k+1)}{2^{k+1}}$$

$$= 2 - \frac{(k+1)+2}{2^{k+1}}$$

對 $n = k + 1$, 命題為真。

藉數學歸納法, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, 命題為真。

21. 當 $n = 1$,

$$\text{左式} = \frac{1 \times 2}{2 \times 3} = \frac{1}{3}, \text{右式} = \frac{2^2}{1+2} - 1 = \frac{1}{3} = \text{左式}$$

對 $n = 1$, 命題為真。

假設 $\frac{1 \times 2}{2 \times 3} + \frac{2 \times 2^2}{3 \times 4} + \frac{3 \times 2^3}{4 \times 5} + \dots + \frac{k \times 2^k}{(k+1)(k+2)} = \frac{2^{k+1}}{k+2} - 1$, 其中 $k \in \mathbb{Z}^+$ 。

$$\frac{1 \times 2}{2 \times 3} + \frac{2 \times 2^2}{3 \times 4} + \frac{3 \times 2^3}{4 \times 5} + \dots + \frac{k \times 2^k}{(k+1)(k+2)} + \frac{(k+1) \times 2^{k+1}}{(k+2)(k+3)}$$

$$= \frac{2^{k+1}}{k+2} - 1 + \frac{(k+1)2^{k+1}}{(k+2)(k+3)}$$

$$= \frac{2^{k+1}}{(k+2)(k+3)} [(k+3) + (k+1)] - 1$$

$$= \frac{2^{k+1}(2k+4)}{(k+2)(k+3)} - 1$$

$$= \frac{2^{k+2}}{k+3} - 1$$

對 $n = k + 1$, 命題為真。

藉數學歸納法, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, 命題為真。

22. 當 $n = 1$,

$$\text{左式} = \frac{1}{a-1} - \frac{1}{a} = \frac{a - (a-1)}{a(a-1)} = \frac{1}{a(a-1)} = \text{右式}$$

對 $n = 1$, 命題為真。

$$\text{假設 } \frac{1}{a-1} - \frac{1}{a} - \frac{1}{a^2} - \dots - \frac{1}{a^k} = \frac{1}{a^k(a-1)}, \text{ 其中 } k \in \mathbb{Z}^+.$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{a-1} - \frac{1}{a} - \frac{1}{a^2} - \dots - \frac{1}{a^k} - \frac{1}{a^{k+1}} &= \frac{1}{a^k(a-1)} - \frac{1}{a^{k+1}} \\ &= \frac{1}{a^{k+1}(a-1)} [a - (a-1)] \\ &= \frac{1}{a^{k+1}(a-1)} \end{aligned}$$

對 $n = k + 1$, 命題為真。

藉數學歸納法, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, 命題為真。

23. 當 $n = 1$,

$$\text{左式} = 1^3 = 1, \text{ 右式} = \frac{1}{4}(1)^2(2)^2 = 1 = \text{左式}$$

對 $n = 1$, 命題為真。

$$\text{假設 } 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 = \frac{1}{4}k^2(k+1)^2, \text{ 其中 } k \in \mathbb{Z}^+.$$

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 \\ &= \frac{1}{4}k^2(k+1)^2 + (k+1)^3 \\ &= \frac{(k+1)^2}{4} [k^2 + 4(k+1)] \\ &= \frac{1}{4}(k+1)^2(k+2)^2 \end{aligned}$$

對 $n = k + 1$, 命題為真。

藉數學歸納法, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, 命題為真。

24. 當 $n = 1$,

$$\text{左式} = 1 \times 4 = 4, \text{ 右式} = \frac{1}{3}(1)(1+1)(1+5) = 4 = \text{左式}$$

對 $n = 1$, 命題為真。

$$\text{假設 } 1 \times 4 + 2 \times 5 + 3 \times 6 + \dots + k(k+3) = \frac{1}{3}k(k+1)(k+5), \text{ 其中 } k \in \mathbb{Z}^+.$$

$$\begin{aligned} 1 \times 4 + 2 \times 5 + 3 \times 6 + \dots + k(k+3) + (k+1)(k+4) \\ &= \frac{1}{3}k(k+1)(k+5) + (k+1)(k+4) \\ &= \frac{1}{3}(k+1)(k^2 + 5k + 3k + 12) \\ &= \frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+6) \end{aligned}$$

對 $n = k + 1$, 命題為真。

藉數學歸納法, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, 命題為真。

25. (a) 當 $n = 1$,

$$\text{左式} = 1^2 = 1, \text{右式} = \frac{1}{6}(1)(2)(3) = 1 = \text{左式}$$

對 $n = 1$, 命題為真。

1

假設 $1^2 + 2^2 + \dots + k^2 = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$, 其中 $k \in \mathbb{Z}^+$ 。

1

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 &= \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1) + (k+1)^2 \\ &= \frac{1}{6}(k+1)[k(2k+1) + 6(k+1)] \\ &= \frac{1}{6}(k+1)(2k^2 + 7k + 6) \\ &= \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3) \end{aligned}$$

1

1

對 $n = k + 1$, 命題為真。

藉數學歸納法, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, 命題為真。

1

(b) $1 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + n(n+1) = \sum_{r=1}^n r(r+1)$

$$= \sum_{r=1}^n r^2 + \sum_{r=1}^n r$$

1A

$$= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + \frac{n(n+1)}{2}$$

1M

$$= \frac{n(n+1)}{6}[(2n+1) + 3]$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

1A

26. 當 $n = 1$,

$$\text{左式} = 1 \times 2 = 2, \text{右式} = \frac{1}{3}(1)(2)(3) = 2 = \text{左式}$$

對 $n = 1$, 命題為真。

1

假設 $1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + k(k+1) = \frac{1}{3}k(k+1)(k+2)$, 其中 $k \in \mathbb{Z}^+$ 。

1

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + k(k+1) + (k+1)(k+2)$$

$$= \frac{1}{3}k(k+1)(k+2) + (k+1)(k+2)$$

1

$$= \frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3)$$

1

對 $n = k+1$, 命題為真。

藉數學歸納法, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, 命題為真。

1

$$1 \times 3 + 2 \times 4 + 3 \times 5 + \dots + 50 \times 52 = \sum_{r=1}^{50} r(r+2)$$

$$= \sum_{r=1}^{50} r(r+1) + \sum_{r=1}^{50} r$$

1A

$$= \frac{1}{3}(50)(51)(52) + \frac{50(51)}{2}$$

1M

$$= 45\,475$$

1A

27. (a) 當 $n = 1$,

$$\text{左式} = 2(2) = 4, \text{右式} = 1(2^{1+1}) = 4 = \text{左式}$$

1

對 $n = 1$, 命題為真。

假設 $2(2) + 3(2)^2 + \dots + (k+1)(2^k) = k(2^{k+1})$, 其中 $k \in \mathbb{Z}^+$ 。

1

$$2(2) + 3(2)^2 + 4(2)^3 + \dots + (k+1)(2^k) + (k+2)(2^{k+1})$$

$$= k(2^{k+1}) + (k+2)(2^{k+1})$$

1

$$= 2^{k+1}(k+k+2)$$

$$= (k+1)2^{k+2}$$

1

對 $n = k+1$, 命題為真。

藉數學歸納法, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, 命題為真。

1

(b) $1(2) + 2(2^2) + 3(2^3) + \dots + 98(2^{98})$

$$= \sum_{k=0}^{97} (k+1)(2^{k+1})$$

$$= 2 \sum_{k=0}^{97} (k+1)(2^k)$$

1A

$$= 2 + 2 \sum_{k=1}^{97} (k+1)(2^k)$$

$$= 2 + 2(97)(2^{98})$$

1M

$$= 2 + 97(2^{99})$$

1

28. (a) 當 $n = 1$,

$$\text{左式} = 1^2 = 1, \text{右式} = \frac{(1)(2)(3)}{6} = 1 = \text{左式}$$

對 $n = 1$, 命題為真。

$$\text{假設 } 1^2 + 2^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}, \text{ 其中 } k \in \mathbb{Z}^+.$$

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \\ &= \frac{1}{6}(k+1)[k(2k+1) + 6(k+1)] \\ &= \frac{1}{6}(k+1)(2k^2 + 7k + 6) \\ &= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \end{aligned}$$

對 $n = k + 1$, 命題為真。

藉數學歸納法, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, 命題為真。

(b) (i) 磚的長度 = $\frac{x}{n}$ m 及第 r 層的磚塊數目 = r^2

$$\text{第 } r \text{ 層的體積} = \frac{r^2 x^3}{n^3} \text{ m}^3$$

$$\text{塔的體積} = \sum_{r=1}^n \frac{r^2 x^3}{n^3}$$

$$= \frac{x^3}{n^3} \sum_{r=1}^n r^2$$

$$= \frac{x^3}{n^3} \times \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

$$= \frac{x^3(n+1)(2n+1)}{6n^2} \text{ m}^3$$

(ii) 角錐的高 = $n \times \frac{x}{n} = x$ m。

$$\text{角錐的體積} = \frac{1}{3} x^2(x) = \frac{x^3}{3} \text{ m}^3$$

塔的體積 - 角錐的體積

$$= \frac{x^3(n+1)(2n+1)}{6n^2} - \frac{x^3}{3}$$

$$= \frac{x^3[(n+1)(2n+1) - 2n^2]}{6n^2}$$

$$= \frac{x^3}{6} \left(\frac{3n+1}{n^2} \right)$$

$$> 0$$

所以, 塔的體積恆大於角錐的體積。

若 n 很大時, 二者體積的差將接近零。

29. (a) 當 $n = 1$,

$$\text{左式} = 1 \times 2 = 2, \text{右式} = \frac{1}{3}(1)(2)(3) = 2 = \text{左式}$$

對 $n = 1$, 命題為真。

1

$$\text{假設 } 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + k(k+1) = \frac{1}{3}k(k+1)(k+2), \text{ 其中 } k \in \mathbb{Z}^+。$$

1

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + k(k+1) + (k+1)(k+2)$$

1

$$= \frac{1}{3}k(k+1)(k+2) + (k+1)(k+2)$$

1

$$= \frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3)$$

1

對 $n = k + 1$, 命題為真。

藉數學歸納法, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, 命題為真。

1

(b) (i) 所求數目 $= 1 + 2 + 3 + \dots + r$

$$= \frac{r(r+1)}{2}$$

1A

$$\text{(ii) 所求數目} = \sum_{r=1}^n \frac{r(r+1)}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{r=1}^n r(r+1)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

1M

$$= \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$

1A

$$\text{(iii) 第 } r \text{ 層所需的時間} = \frac{1}{2}r(r+1) \times \frac{2}{r}$$

$$= (r+1) \text{ min}$$

1A

$$\text{所求時間} = \sum_{r=1}^{10} (r+1)$$

1M

$$= \sum_{r=1}^{10} r + 10$$

$$= \frac{10(11)}{2} + 10$$

1M

$$= 65 \text{ min}$$

1A