REG-GS-2425-ASM-SET 4-MATH
建議題解

多項選擇題

1. B	2. A	3. D	4. D	5. D
6. A	7. C	8. B	9. B	10. A
11. C	12. D	13. B	14. D	15. C
16. D	17. C	18. A	19. B	20. A
21. D	22. C	23. D	24. A	

1. $\boxed{\text{B}}$

I. ✓。公比 $= 2^m$。

II. ✗。$\dfrac{2m^2}{m} = 2m$，但 $\dfrac{3m^4}{2m^2} = \dfrac{3m^2}{2} \neq 2m$。

III. ✓。數列：$\log m, 2\log m, 4\log m, 8\log m$。公比 $= 2$。

2. $\boxed{\text{A}}$

$b^2 = ac$

$\dfrac{b}{a} = \dfrac{c}{b}$

I. ✓。可得 $\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = \sqrt{\dfrac{b}{a}}$ 及 $\dfrac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{c}{b}}$。

由於 $\dfrac{b}{a} = \dfrac{c}{b}$，$\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = \dfrac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}}$。

II. ✗。取 $a = 1$、$b = 2$ 及 $c = 4$。

$\dfrac{2^b}{2^a} = \dfrac{2^2}{2^1} = 2$ 及 $\dfrac{2^c}{2^b} = \dfrac{2^4}{2^2} = 4$。

$2^a, 2^b, 2^4c$ 不是等比數列。

III. ✗。取 $a = 10$、$b = 100$ 及 $c = 1000$。

$\dfrac{\log b}{\log a} = \dfrac{\log 100}{\log 10} = 2$ 及 $\dfrac{\log c}{\log b} = \dfrac{\log 1000}{\log 100} = \dfrac{3}{2}$。

$\log a, \log b, \log c$ 不是等比數列。

3. $\boxed{\text{D}}$

$$\frac{x+1}{2} = \frac{x^2-7}{x+1}$$

$$(x+1)^2 = 2(x^2-7)$$

$$0 = x^2 - 2x - 15$$

$$x = 5 \quad 或 \quad -3$$

4. $\boxed{\text{D}}$

$5 - h = k - 5$ 及 $\dfrac{3}{h} = \dfrac{k}{3}$

$h + k = 10$ $hk = 9$

$$\begin{aligned} h^2 + k^2 &= (h + k)^2 - 2hk \\ &= 10^2 - 2(9) \\ &= 82 \end{aligned}$$

5. $\boxed{\text{D}}$

$$\begin{aligned} \frac{x + 7}{4} &= \frac{x^2 + 11}{x + 7} \\ (x + 7)^2 &= 4(x^2 + 11) \\ 0 &= 3x^2 - 14x - 5 \\ x &= -\frac{1}{3} \quad \text{或} \quad 5 \end{aligned}$$

6. $\boxed{\text{A}}$

設公比為 R。

$$\begin{cases} p + r = p + pR^2 = 2 \\ q + s = pR + pR^3 = 32 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{pR + pR^3}{p + pR^2} &= \frac{32}{2} \\ \frac{pR(1 + R^2)}{p(1 + R^2)} &= 16 \\ R &= 16 \end{aligned}$$

公比為 16。

7. $\boxed{\text{C}}$

設 a 及 r 分別為首項及公比。

$$\begin{cases} (a)(ar) = 48 \\ (ar)(ar^3) = 1296 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{(ar)(ar^3)}{(a)(ar)} &= \frac{1296}{48} \\ r^3 &= 27 \\ r &= 3 \end{aligned}$$

當 $r = 3$ 時，$a^2 = \dfrac{48}{r} = 16$。

$$\begin{aligned} \text{所求之積} &= (ar^2)(ar^4) \\ &= a^2r^6 \\ &= 16(3^6) \\ &= 11\,664 \end{aligned}$$

8. $\boxed{\text{B}}$

設 n 為項數。

$$\begin{aligned} (a^4)(a^3)^{n-1} &= a^{145} \\ a^{3n-3} &= a^{141} \\ 3n - 3 &= 141 \\ n &= 48 \end{aligned}$$

共有 48 項。

9. $\boxed{\text{B}}$

設 r 為公比。

$$\begin{cases} a_1 + a_1r + a_1r^2 = 1 \\ a_1r^3 + a_1r^4 + a_1r^5 = 8 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{a_1r^3(1 + r + r^2)}{a_1(1 + r + r^2)} &= \frac{8}{1} \\ r^3 &= 8 \\ r &= 2 \end{aligned}$$

當 $r = 2$ 時，$a_1 = \dfrac{1}{1 + r + r^2} = \dfrac{1}{7}$。

可得 $a_2 = a_1r = \dfrac{2}{7}$。

10. $\boxed{\text{A}}$

設 r 為公比。

$$\begin{aligned} 243r^3 &= 9 \\ r^3 &= \frac{1}{27} \\ r &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y - x &= 243r^2 - 243r \\ &= -54 \end{aligned}$$

11. $\boxed{\text{C}}$

設 r 為公比。

$$\begin{aligned} \frac{3}{r} + 3r &= \frac{13}{2} \\ 3 + 3r^2 &= \frac{13r}{2} \\ 3r^2 - \frac{13r}{2} + 3 &= 0 \\ r &= \frac{2}{3} \quad \text{或} \quad \frac{3}{2} \end{aligned}$$

12. $\boxed{\text{D}}$

設 r 為公比。

$$\begin{aligned} 6 + 6r + 6r^2 &= 186 \\ 6r^2 + 6r - 180 &= 0 \\ r &= -6 \quad \text{或} \quad 5 \end{aligned}$$

13. $\boxed{\text{B}}$

設 a 及 r 分別為首項及公比。

$$\frac{ar^6}{ar^4}=\frac{6}{24}$$
$$r^2=\frac{1}{4}$$
$$r=\pm\frac{1}{2}$$

I. ✓。$T_1=a=\dfrac{24}{r^4}>0$

II. ✓。對 $r=\pm 1$，$T_1-T_2=T_1(1-r)>0$。

III. ✗。當 $r=-\dfrac{1}{2}$ 時，

$$T_2+T_3+\ldots+T_{200}=\frac{T_2(1-r^{199})}{1-r}$$
$$=\frac{ar(1-r^{199})}{1-r}$$

留意 $a>0$、$r<0$、$(1-r^{199})>0$ 及 $(1-r)>0$。

總和因此為負數。

14. $\boxed{\text{D}}$

公比 $=\dfrac{y}{x}$

設 a 為首項。

$$a\left(\frac{y}{x}\right)^2=x$$
$$a=\frac{x^3}{y^2}$$

無限項之和 $=\dfrac{\left(\frac{x^3}{y^2}\right)}{1-\frac{y}{x}}$

$$=\frac{x^3}{y^2}\div\frac{x-y}{x}$$
$$=\frac{x^4}{y^2(x-y)}$$

15. $\boxed{\text{C}}$

無限項之和 $=\dfrac{-a}{1-\left(-\frac{1}{a}\right)}$

$$=-a\div\frac{a+1}{a}$$
$$=-\frac{a^2}{1+a}$$

16. $\boxed{\text{D}}$

公比 = $\dfrac{n}{m}$

設 a 為首項。

$$a\left(\frac{n}{m}\right)^3 = m$$
$$a = \frac{m^4}{n^3}$$

$$\text{無限項之和} = \frac{\left(\frac{m^4}{n^3}\right)}{1-\frac{n}{m}}$$
$$= \frac{m^4}{n^3} \div \frac{m-n}{m}$$
$$= \frac{m^5}{n^3(m-n)}$$

17. $\boxed{\text{C}}$

$$\text{無限項之和} = \frac{18}{1-\frac{1}{3}}$$
$$= 27$$

18. $\boxed{\text{A}}$

設 r 為公比。

首項 = $\dfrac{-9}{r}$

$$\frac{\left(\frac{-9}{r}\right)}{1-r} = \frac{81}{4}$$
$$\frac{-9}{r(1-r)} = \frac{81}{4}$$
$$-36 = 81r - 81r^2$$
$$81r^2 - 81r - 36 = 0$$
$$r = -\frac{1}{3} \quad \text{或} \quad \frac{4}{3}\text{（捨去）}$$

留意 $-1 < r < 1$ 使無限項之和存在。

19. $\boxed{\text{B}}$

$$\frac{x}{1-x} = \frac{1}{2}$$
$$2x = 1 - x$$
$$x = \frac{1}{3}$$

20. $\boxed{\text{A}}$

設首項及公比分別為 a 及 r。

$$\begin{cases} \dfrac{a}{1-r} = \dfrac{81}{4} \\ ar = -9 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} ar \div \frac{a}{1-r} &= -9 \div \frac{81}{4} \\ r(1-r) &= -\frac{4}{9} \\ -r^2 + r + \frac{4}{9} &= 0 \\ r &= -\frac{1}{3} \quad \text{或} \quad \frac{4}{3}\text{（捨去）} \end{aligned}$$

21. $\boxed{\text{D}}$

首項 $= 3^{6-2(1)} = 81$ 及第二項 $= 3^{6-2(2)} = 9$

公比 $= \dfrac{9}{81} = \dfrac{1}{9}$

22. $\boxed{\text{C}}$

設 a 及 r 分別為首項及公比。

$$\begin{aligned} \frac{a}{1-r} &= 3a \\ a &= 3a(1-r) \\ 0 &= a[3(1-r)-1] \\ 0 &= a(2-3r) \\ r &= \frac{2}{3} \quad \text{或} \quad a = 0\text{（捨去）} \end{aligned}$$

23. $\boxed{\text{D}}$

$$\begin{aligned} \text{所求之和} &= \frac{-81}{1-\left(\frac{-9}{-81}\right)} \\ &= -\frac{729}{8} \end{aligned}$$

24. $\boxed{\text{A}}$

$$\begin{aligned} \text{所求之和} &= \frac{12}{1-\frac{3}{12}} \\ &= 16 \end{aligned}$$

結構式試題

25. (a) $30 + 30r + 30r^2 = 52.5$ 1M

$30r^2 + 30r - 22.5 = 0$

$r = \frac{1}{2}$ 或 $-\frac{3}{2}$ （捨去） 1A

(b) 汽球的高度 $\leq \frac{30}{1 - \frac{1}{2}}$ 1M

$= 60\text{ m} < 75\text{ m}$

該汽球不能到達 75 m 的高度。 1A

(c) 設所需時間為 n 分鐘。

$\frac{30(1 - 0.5^n)}{1 - 0.5} = 58.125$ 1M

$0.5^n = 0.03125$

$n \log 0.5 = \log 0.03125$ 1M

$n = 5$

所求時間為 5 分鐘。 1A

26. (a) 所求概率 $= \frac{3}{7} \times \frac{3}{8} + \frac{4}{7} \times \frac{6}{8}$ 1M

$= \frac{33}{56}$ 1A

(b) 所求概率 $= \frac{33}{56} + \left(\frac{23}{56}\right)^2 \frac{33}{56} + \left(\frac{23}{56}\right)^4 \frac{33}{56} + \ldots$ 1M

$= \frac{\frac{33}{56}}{1 - \frac{529}{3136}}$ 1M

$= \frac{56}{79}$ 1A

(c) 所求概率 $= \frac{\left(\frac{23}{56}\right)\frac{33}{56} + \left(\frac{23}{56}\right)^3 \frac{33}{56}}{1 - \frac{56}{79}}$ 1M+1A

≈ 0.972 1A

27. (a) (i) 所求數目

$= 120\,000(1 + 10\%)^n - 3000(1 + 10\%)^{n-1} - 3000(1 + 10\%)^{n-2} - \ldots - 3000$ 1M

$= 120\,000(1.1)^n - \frac{3000(1.1^n - 1)}{1.1 - 1}$ 1M

$= 90\,000(1.1)^n + 30\,000$ 1A

(ii) $90\,000(1.1)^n + 30\,000 > 200\,000$ 1M

$1.1^n > \frac{17}{9}$

$n \log 1.1 > \log \frac{17}{9}$ 1M

$n > 6.67$

名單上的人數將在 2020 年超越 20 000。 1A

(b) 可得

$$\begin{cases} 10\,000p + q = 37\,100 \\ 10\,000p^2 + q = 39\,641 \end{cases}$$ 1M

$$10\,000p^2 + (37\,100 - 10\,000p) = 39\,641$$ 1M

$$10\,000p^2 - 10\,000p - 2541 = 0$$

$$p = 1.21 \quad \text{或} \quad -0.21 \text{（捨去）}$$

當 $p = 1.21$ 時，$q = 25\,000$。 1A

設 m 為 2013 年後的年數，使得房屋的數量不能滿足其需求。

$$90\,000(1.1)^m + 30\,000 > 10\,000(1.21)^m + 25\,000$$ 1M

$$0 > 1.21^m - 9(1.1)^m - 0.5$$

$$-0.055\,216\,789\,57 < 1.1^m < 9.055\,216\,790$$

$$m \log 1.1 < \log 9.055\,216\,790$$

$$m < 23.1$$ 1A

故此，房屋的數量將在 2014 年至 2036 年間不能滿足其需求。

同意該宣稱。 1A