REG-GS-2425-ASM-SET 3-MATH
建議題解

多項選擇題

1. B	2. A	3. B	4. D	5. C
6. A	7. D	8. C	9. D	10. B
11. A	12. C	13. B	14. A	15. D
16. C	17. B	18. D		

1. $\boxed{\text{B}}$

$$\begin{aligned} 1 + 2^2 + 2^4 + \ldots + 2^{2n} &= \frac{1[(2^2)^{n+1} - 1]}{2^2 - 1} \\ &= \frac{4^{n+1} - 1}{3} \end{aligned}$$

2. $\boxed{\text{A}}$

$$公比 = \frac{9}{27} = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} 所求之和 &= \frac{27\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^6\right]}{1 - \frac{1}{3}} \\ &= \frac{364}{9} \end{aligned}$$

3. $\boxed{\text{B}}$

$$\begin{aligned} 所求之和 &= \frac{10\,368\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right]}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= 20\,715.75 \end{aligned}$$

4. $\boxed{\text{D}}$

$$\begin{aligned} \frac{7(2^n - 1)}{2 - 1} &= 114\,681 \\ 2^n &= 16\,384 \\ n \log 2 &= \log 16\,384 \\ n &= 14 \end{aligned}$$

5. $\boxed{\text{C}}$

留意 $\log 2^2 = 2\log 2$ 及 $\log 2^4 = 4\log 2$。
該數列的公比為 2。

$$\log 2 + 2\log 2 + 4\log 2 + 2^{n-1}\log 2 > \log 2^{4095}$$
$$\frac{\log 2[2^n - 1]}{2-1} > 4095\log 2$$
$$2^n > 4096$$
$$n\log 2 > \log 4096$$
$$n > 12$$

n 的最小可取值為 13。

6. $\boxed{\text{A}}$

設首項及公比分別為 a 及 r。

$$\frac{ar^8}{ar^6} = \frac{8}{32}$$
$$r^2 = \frac{1}{4}$$
$$r = \pm\frac{1}{2}$$

I. ✓。$a_1 = \dfrac{a_7}{r^6} > 0$。

II. ✓。$a_1 - a_2 = a_1(1-r) > 0$ （由於 $a_1 > 0$ 及 $1 - r > 0$）。

III. ✗。若 $r = \dfrac{1}{2}$，則所有項均為正值，其總和必為正值，學生毋須計算結果。
若 $r = -\dfrac{1}{2}$，$a_2 + a_3 + \ldots + a_{100} = \dfrac{a_1 r(1-r^{99})}{1-r} = \dfrac{\oplus \ominus (\oplus)}{\oplus} < 0$。
（由於 $a_1 > 0$、$r < 0$、$1 - r > 0$ 及 $1 - r^{99} > 0$）

7. $\boxed{\text{D}}$

設首項及公比分別為 a 及 r。

$$\frac{ar^7}{ar^5} = \frac{96}{216}$$
$$r^2 = \frac{4}{9}$$
$$r = \pm\frac{2}{3}$$

I. ✗。當 $r = -\dfrac{2}{3}$ 時，$x_3 = \dfrac{x_6}{r^3} < 0$。$x_3$ 不一定等於 729。

II. ✓。$\dfrac{x_5}{x_7} = \dfrac{1}{r^2} = \dfrac{9}{4} > 1$。

III. ✓。$x_2 = \dfrac{x_6}{r^4} = \dfrac{2187}{2}$，公比 $= \dfrac{x_4}{x_2} = r^2$。
$x_2 + x_4 + x_6 + \ldots + x_{2n} = \dfrac{2187}{2} \times \dfrac{1-(r^2)^n}{1-r^2} = 1968.3\left[1 - \left(\dfrac{4}{9}\right)^n\right] < 1968.3 < 2015$。

8. $\boxed{\text{C}}$

$$\frac{5}{6} = 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} + \ldots$$
$$= \frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{x}\right)}$$
$$= \frac{x}{x+1}$$
$$5x + 5 = 6x$$
$$x = 5$$

9. $\boxed{\text{D}}$

無限項之和 $= \dfrac{-1}{1 - \left(-\frac{1}{x}\right)} = \dfrac{-x}{x+1}$.

10. $\boxed{\text{B}}$

無限項之和只當 $-1 < r < 1$ 時存在。
答案為 B。

11. $\boxed{\text{A}}$

所求之和 $= \dfrac{\left(\frac{1}{x^3}\right)}{1 - (-x^2)}$
$$= \frac{1}{x^3(1 + x^2)}$$
$$= \frac{1}{x^3 + x^5}$$

12. $\boxed{\text{C}}$

設公比為 r。
$$\frac{\frac{3}{2}}{1 - r} = 2$$
$$r = \frac{1}{4}$$

13. $\boxed{\text{B}}$

可得

$$\begin{cases} \dfrac{a}{1-r} = \dfrac{64}{5} \\ ar = -4 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{\left(\frac{-4}{r}\right)}{1-r} &= \frac{64}{5} \\ -20 &= 64r(1-r) \\ 0 &= -64r^2 + 64r + 20 \\ r &= -\frac{1}{4} \quad \text{或} \quad \frac{5}{4}\ \text{（捨去）} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{首項} &= \frac{-4}{r} \\ &= 16 \end{aligned}$$

14. $\boxed{\text{A}}$

設公比為 r。

$$\begin{aligned} \frac{a}{1-r} &= \frac{3}{4}a \\ r &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

15. $\boxed{\text{D}}$

可得

$$\begin{cases} a + ar = 24 \\ \dfrac{a}{1-r} = 27 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (a+ar) \div \frac{a}{1-r} &= \frac{24}{27} \\ (1+r)(1-r) &= \frac{8}{9} \\ 1 - r^2 &= \frac{8}{9} \\ r^2 &= \frac{1}{9} \\ r &= \pm\frac{1}{3} \end{aligned}$$

16. $\boxed{\text{C}}$

$$\begin{aligned}\text{所求之和} &= (-9) + (-9)\left(\frac{1}{9}\right) + (-9)\left(\frac{1}{9}\right)^2 + \ldots \\ &= \frac{-9}{1 - \frac{1}{9}} \\ &= -\frac{81}{8}\end{aligned}$$

17. $\boxed{\text{B}}$

$$\begin{aligned}\text{所求之和} &= 9 + 1 + \frac{1}{9} + \ldots \\ &= \frac{9}{1 - \frac{1}{9}} \\ &= \frac{81}{8}\end{aligned}$$

18. $\boxed{\text{D}}$

$$\begin{aligned}\text{所求之和} &= 8 + 2 + \ldots \\ &= \frac{8}{1 - \frac{1}{4}} \\ &= \frac{32}{3}\end{aligned}$$

結構式試題

19. (a) 設 a 及 r 分別為首項及公比。

$$\frac{ar^5}{ar^2} = \frac{486}{144}$$ 1M

$$r^3 = \frac{27}{8}$$

$$r = \frac{3}{2}$$

首項 $= a = 144 \div \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 64$。 1A

(b) $64 + 96 + \ldots + 64(1.5)^{n-1} > 8 \times 10^{18}$

$$\frac{64(1.5^n - 1)}{1.5 - 1} > 8 \times 10^{18}$$ 1M

$$1.5^n > 6.25 \times 10^{16} + 1$$

$$n \log 1.5 > \log\left(6.25 \times 10^{16} + 1\right)$$ 1M

$$n > 95.4$$

n 的最小值為 96。 1A

20. (a) (i) 所求金額 $= P\left(1 + \frac{3\%}{12}\right)^2 - x\left(1 + \frac{3\%}{12}\right) - x$ 1M

$= \$(1.0025^2 P - 1.0025x - x)$ 1A

(ii) 所求金額 $= 1.0025^n P - 1.0025^{n-1}x - 1.0025^{n-2}x - \ldots - x$ 1M

$= 1.0025^n P - \frac{x(1.0025^n - 1)}{1.0025 - 1}$ 1M

$= \$[1.0025^n P - 400x(1.0025^n - 1)]$ 1A

(b) (i) $P = 3\,000\,000 \times 70\% = 2\,100\,000$

代 $P = 2\,100\,000$ 及 $x = 10\,000$，

$$1.0025^n(2\,100\,000) - 400(10\,000)(1.0025^n - 1) \le 0$$ 1M

$$1.0025^n \ge \frac{40}{19}$$

$$n \log 1.0025 \ge \log \frac{40}{19}$$ 1M

$$n \ge 298.1$$ 1A

文俊需 299 個月以清還貸款。 1A

(ii) 首月利息 $= 2\,100\,000 \times \frac{3\%}{12}$

$= \$5250 > \$5000$ 1M

故此，文俊永不能清還貸款，他的要求不會被受理。 1A

21. (a) (i) $P(1+r\%)^2 = 1.0201P$ 1M

$1+r\% = 1.01$

$r = 1$ 1A

(ii) 所求本利和

$= P\left(1+\dfrac{6\%}{12}\right)^n + P(1.01)\left(1+\dfrac{6\%}{12}\right)^{n-1} + P(1.01)^2\left(1+\dfrac{6\%}{12}\right)^{n-2} + \ldots$

$+ P(1.01)^{n-1}\left(1+\dfrac{6\%}{12}\right)$ 1M

$= P[1.005^n + (1.01)(1.005)^{n-1} + (1.01)^2(1.005)^{n-2} + \ldots + (1.01)^{n-1}(1.005)]$

$= P \times \dfrac{1.005^n\left[\left(\frac{1.01}{1.005}\right)^n - 1\right]}{\frac{1.01}{1.005} - 1}$ 1M

$= P \times \dfrac{1.01^n - 1.005^n}{\frac{0.005}{1.005}}$

$= \$201P[(1.01)^n - (1.005)^n]$ 1

(b) (i) 所求售價 $= 3\,000\,000(1+0.5\%)^{n+24}$ 1M

$= \$3\,000\,000(1.005)^{n+24}$ 1A

(ii) 黃小姐的戶口的本利和

$= 201(20\,000)[(1.01)^n - (1.005)^n]$

$= \$4\,020\,000[(1.01)^n - (1.005)^n]$

所求首期

$= 3\,000\,000(1.005)^{n+24} \times 30\%$

$= \$900\,000(1.005)^{n+24}$

$4\,020\,000[(1.01)^n - (1.005)^n] \ge 900\,000(1.005)^{n+24}$ 1M+1A

$1.01^n - 1.005^n \ge \dfrac{15}{67}(1.005)^{n+24}$

$\left(\dfrac{1.01}{1.005}\right)^n \ge 1 + \dfrac{15}{67} \times 1.005^{24}$

$n \log \dfrac{1.01}{1.005} \ge \log\left(1 + \dfrac{15}{67} \times 1.005^{24}\right)$ 1M

$n \ge 45.3$

在 2015 年十月，該存款將足夠支付首期。 1A

22. (a) (i) 所求數目

$= 7\times 10^6(1+2\%)^n - 5\times 10^3(1+2\%)^{n-1} - 5\times 10^3(1+2\%)^{n-2} - \ldots - 5\times 10^3$ 1M

$= 7\times 10^6(1.02)^n - \dfrac{5\times 10^3(1.02^n - 1)}{1.02 - 1}$ 1M

$= 7\times 10^6(1.02)^n - 2.5\times 10^5(1.02^n - 1)$

$= 6.75\times 10^6(1.02)^n + 2.5\times 10^5$ 1

(ii) $6.75\times 10^6(1.02)^n + 2.5\times 10^5 > 7\times 10^6 \times 2$

$$1.02^n > \frac{55}{27}$$

$$n\log 1.02 > \log\frac{55}{27} \qquad \text{1M}$$

$$n > 35.9$$

因此，$n = 36$。 1A

(b) $4\times 10^6(1.0404)^n + 2\times 10^5 > 6.75\times 10^6(1.02)^n + 2.5\times 10^5$

$$40(1.02)^{2n} - 67.5(1.02)^n - 0.5 > 0 \qquad \text{1M}$$

$1.02^n < 0.0711$（捨去） 或 $1.02^n > 1.69$

$$n\log 1.02 > \log 1.69 \qquad \text{1M}$$

$$n > 26.6$$

因此，所求時間為開始觀測的第 27 秒後。 1A

(c) n 秒後的粒子數目

$= 7 \times 10^6(1 + 1\%)^n - 1 \times 10^5(1 + 1\%)^{n-1} - 1 \times 10^5(1 - 2\%)(1 + 1\%)^{n-2}$

$\quad - 1 \times 10^5(1 - 2\%)^2(1 + 1\%)^{n-3} - \ldots - 1 \times 10^5(1 - 2\%)^{n-1}$ 1M

$$= 7 \times 10^6(1.01)^n - \frac{1 \times 10^5(1.01)^{n-1}\left[1 - \left(\frac{0.98}{1.01}\right)^n\right]}{1 - \frac{0.98}{1.01}}$$

$$= 7 \times 10^6(1.01)^n - \frac{100}{3} \times 10^5(1.01^n - 0.98^n)$$

$$= \left[\frac{110}{3}(1.01)^n + \frac{100}{3}(0.98)^n\right]10^5$$

若粒子數目在 n 秒後開始上升，

$$\frac{110}{3}(1.01)^n + \frac{100}{3}(0.98)^n > \frac{110}{3}(1.01)^{n-1} + \frac{100}{3}(0.98)^{n-1}$$

$$\frac{11}{30}(1.01)^{n-1} > \frac{2}{3}(0.98)^{n-1}$$

$$\left(\frac{1.01}{0.98}\right)^{n-1} > \frac{20}{11}$$

$$(n - 1)\log\frac{1.01}{0.98} > \log\frac{20}{11}$$

$$n > 20.8$$ 1A

粒子數目將在開始觀測後 21 秒開始上升。

同意該宣稱。 1A