REG-GS-2425-ASM-SET 2-MATH
建議題解

多項選擇題

1. A	2. A	3. C	4. A	5. A
6. D	7. A	8. B	9. D	10. A
11. A	12. C	13. C	14. B	15. A
16. A	17. C	18. B	19. B	20. C
21. B	22. A	23. B	24. A	25. D
26. A	27. D	28. A	29. A	30. D

1. $\boxed{\text{A}}$

$$\text{所求之和} = \frac{\frac{3}{4}(4^n - 1)}{4 - 1}$$
$$= \frac{1}{4}(4^n - 1)$$

2. $\boxed{\text{A}}$

$$\text{所求之和} = \frac{2\left[1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{10}\right]}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}$$
$$= \frac{2\left(1 - \frac{1}{32}\right)}{\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)}$$
$$= \frac{31}{8(2 - \sqrt{2})}$$

3. $\boxed{\text{C}}$

$$\text{所求之和} = \frac{-1[1 - (-4)^7]}{1 - (-4)}$$
$$= -3277$$

4. $\boxed{\text{A}}$

$$\text{第 5 項} = \left(32 - 2^{5-5}\right) - \left(32 - 2^{5-4}\right)$$
$$= 31 - 30$$
$$= 1$$

5. $\boxed{\text{A}}$

$$640\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = -5$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = -\frac{1}{128}$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)^{7}$$

$$n = 8$$

共有 8 項。

$$所求之和 = \frac{640\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{8}\right]}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$= 425$$

6. $\boxed{\text{D}}$

$$所求之和 = \frac{7(5^7-1)}{5-1}$$

$$= 136\,717$$

7. $\boxed{\text{A}}$

$$\frac{-1(3^k-1)}{3-1} < -200$$

$$3^k > 401$$

$$k\log 3 > \log 401$$

$$k > 5.46$$

k 的極小值為 6。

8. $\boxed{\text{B}}$

$$\frac{3(3^k-1)}{3-1} > 780$$

$$3^k > 521$$

$$k\log 3 > \log 521$$

$$k > 5.69$$

k 的極小值為 6。

9. $\boxed{\text{D}}$

$$所求之和 = \frac{18}{1-\frac{1}{3}}$$

$$= 27$$

10. $\boxed{\text{A}}$

設公比為 r。

$$\frac{30}{1-r} = 25$$
$$r = \frac{1}{6}$$

11. $\boxed{\text{A}}$

設首項為 a。

$$\frac{a}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{6}$$
$$a = \frac{1}{4}$$

$$\text{所求之和} = \frac{\frac{1}{4}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^5\right]}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}$$
$$= \frac{11}{64}$$

12. $\boxed{\text{C}}$

$$\text{首四項之和} = -10 - 5 - 2.5 - 1.25$$
$$= -18.75$$
$$\text{無限項之和} = \frac{-10}{1-\frac{1}{2}}$$
$$= -20$$
$$\text{誤差} = -18.75 - (-20)$$
$$= \frac{5}{4}$$

13. $\boxed{\text{C}}$

設首項為 a。

$$\frac{a}{1-\frac{1}{2}} = 16$$
$$a = 8$$

14. $\boxed{\text{B}}$

$$\frac{2x-1}{5x+2}=\frac{x-2}{2x-1}$$
$$(2x-1)^2=(x-2)(5x+2)$$
$$4x^2-4x+1=5x^2-8x-4$$
$$0=x^2-4x-5$$
$$x=5 \quad \text{或} \quad -1\text{（捨去）}$$

$$\text{所求之和}=\frac{27}{1-\frac{9}{27}}$$
$$=\frac{81}{2}$$

15. $\boxed{\text{A}}$

$$\text{公比}=\frac{q}{p}$$
$$\text{首項}=\frac{p}{\left(\frac{q}{p}\right)^2}=\frac{p^3}{q^2}$$
$$\text{所求之和}=\frac{\frac{p^3}{q^2}}{1-\frac{q}{p}}$$
$$=\frac{p^3}{q^2}\div\frac{p-q}{p}$$
$$=\frac{p^4}{q^2(p-q)}$$

16. $\boxed{\text{A}}$

$$\frac{36}{2k}=\frac{72k}{36}$$
$$36=4k^2$$
$$k=3 \quad \text{或} \quad -3\text{（捨去）}$$

該等比數列為 216, 36, 6, …

$$\text{所求之和}=\frac{216}{1-\frac{6}{36}}$$
$$=\frac{1296}{5}$$

17. $\boxed{\text{C}}$

$$\frac{a}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}=\frac{45}{8}$$
$$a=\frac{15}{2}$$

18. $\boxed{\text{B}}$

公比 $= \dfrac{-24}{72} = -\dfrac{1}{3}$

無限項之和 $= \dfrac{72}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)} = 54$

19. $\boxed{\text{B}}$

設首項及公比分別為 a 及 r。

$$\begin{cases} \dfrac{a(1-r^3)}{1-r} = -\dfrac{3}{8} \\ \dfrac{a}{1-r} = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \left(-\frac{1}{3}\right)(1-r^3) &= -\frac{3}{8} \\ r^3 &= -\frac{1}{8} \\ r &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

20. $\boxed{\text{C}}$

所有正數項：$36, 9, \dfrac{9}{4}, \ldots$

總和 $= \dfrac{36}{1-\frac{1}{4}} = 48$

21. $\boxed{\text{B}}$

所求之和 $= \left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3^5} + \ldots\right) + \left(\dfrac{2}{3^3} + \dfrac{2}{3^7} + \ldots\right) \quad = \dfrac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3^4}} + \dfrac{\frac{2}{27}}{1-\frac{1}{3^4}}$

$= \dfrac{33}{80}$

22. $\boxed{\text{A}}$

設首項及公比分別為 a 及 r。

$$\begin{aligned} \frac{ar^7}{ar^5} &= \frac{3}{48} \\ r^2 &= \frac{1}{16} \\ r &= \pm\frac{1}{4} \end{aligned}$$

I. ✓。$x_4 = \dfrac{48}{r^2} = 768$。

II. ✗。當 $r = -\dfrac{1}{4}$ 時，$\dfrac{x_9}{x_{12}} = \dfrac{1}{r^3} < 0 < 1$。

III. ✗。共有 n 項。

$$x_4 + x_6 + \ldots + x_{2n+2} = \frac{768\left[1-\left(\frac{1}{16}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{16}} = 819.2\left[1-\left(\frac{1}{16}\right)^n\right] < 819.2 < 1000$$

23. $\boxed{\text{B}}$

I. ✓。通項 $= (1 - 2^{-n}) - (1 - 2^{-(n-1)})$

$= 2^{-n}(-1 + 2)$

$= 2^{-n}$

可得 $2^{-n} < 1$ 對所有正整數 n。

II. ✗。對所有正整數 n，第 n 項 $= \dfrac{1}{2^n}$ 為有理數。

III. ✓。$\log T_{n+1} - \log T_n = \log 2^{-n-1} - \log 2^{-n}$

$= (-n - 1)\log 2 + n\log 2$

$= -\log 2 =$ 常數

因此，它是一等差數列。

24. $\boxed{\text{A}}$

通項 $= (2^{n+1} - 2) - (2^n - 2)$

$= 2^n(2 - 1)$

$= 2^n$

I. ✓。$\dfrac{T(n+1)}{T(n)} = \dfrac{2^{n+1}}{2^n} = 2 =$ 常數。

II. ✗。第二項 $= 2^2 = 4 \neq 6$。

III. ✗。

25. $\boxed{\text{D}}$

設首項及公比分別為 a 及 r。

$$\frac{ar^7}{ar^2} = \frac{6}{192}$$
$$r^5 = \frac{1}{32}$$
$$r = \frac{1}{2}$$

I. ✗。

II. ✓。$a = \dfrac{192}{r^2} = 768$。

$$768\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} > 10^{-2}$$
$$(n-1)\log\frac{1}{2} > \log\frac{1}{76\,800}$$
$$n < 172$$

有 17 項大於 10^{-2}。

III. ✓。所求之和 $= \dfrac{768\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{13}\right)}{1-\frac{1}{2}} \approx 15358$

> 1535

26. $\boxed{\text{A}}$

I. ✓。第 4 項 $= 2 \times 3^4 = 162$。

II. ✗。首 n 項之和 $= \dfrac{2(3)(3^n-1)}{3-1} = 3(3^n-1)$。

III. ✗。因公比大於 1，無限項之和不存在。

27. $\boxed{\text{D}}$

設首項及公比分別為 a 及 r。

$$\frac{ar^7}{ar^3} = \frac{4}{243} \div \frac{1}{12}$$
$$r^4 = \frac{16}{81}$$
$$r = \pm\frac{2}{3}$$

當 $r = \frac{2}{3}$ 時，$a = \frac{1}{12} \div r^3 = \frac{9}{32}$ 及 $S(\infty) = \frac{a}{1-r} = \frac{27}{32}$ （捨去）

當 $r = -\frac{2}{3}$ 時，$a = \frac{1}{12} \div r^3 = \frac{-9}{32}$。

I. ✗。

II. ✓。$a_1 + a_2 + \ldots + a_{10} = \frac{a(r^9 - 1)}{r - 1} \approx -0.173 < -\frac{1}{10}$。

III. ✓。$a_2 + a_4 + \ldots = \frac{ar}{1 - r^2} = \frac{27}{80}$。

28. $\boxed{\text{A}}$

設首項及公比分別為 a 及 r。

$$\frac{ar^6}{ar^4} = \frac{15}{375}$$
$$r^2 = \frac{1}{25}$$
$$r = \pm\frac{1}{5}$$

I. ✓。$a_1 = \frac{375}{r^4} = 234\,375$。

II. ✗。當 $r = -\frac{1}{5}$ 時，$a_2 = \frac{ar^4}{r^3} < 0$。故此，$a_2 \neq 46\,875$。

III. ✗。當 $r = -\frac{1}{5}$ 時，

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + \ldots &= \frac{234\,375}{1 - \left(-\frac{1}{5}\right)} \\ &= 195\,312.5 < 290\,000 \end{aligned}$$

29. $\boxed{\text{A}}$

設首項及公比分別為 a 及 r。

$$\frac{ar^6}{ar^2} = \frac{48}{3}$$
$$r^4 = 16$$
$$r = \pm 2$$

I. ✓。第 5 項 $= 3 \times r^2 = 12$。

II. ✗。當 $r = -2$ 時，該數列有負值項。

III. ✗。無限項之和不存在。

30. $\boxed{\text{D}}$

設公比為 r。

$$r^{6-2} = \frac{1}{18} \div \frac{9}{32}$$
$$r^4 = \frac{16}{81}$$
$$r = \pm\frac{2}{3}$$

當 $r = \frac{2}{3}$ 時，$a_1 = \frac{a_2}{r} = \frac{27}{64}$。

無限項之和 $= \frac{a_1}{1-r} = \frac{81}{64} > \frac{1}{2}$。

當 $r = -\frac{2}{3}$ 時，$a_1 = \frac{a_2}{r} = -\frac{27}{64}$。

無限項之和 $= \frac{a_1}{1-r} = -\frac{81}{320} < \frac{1}{2}$。

因此，$r = -\frac{2}{3}$。

I. ✓。$a_4 = a_2 \times r^2 = \frac{1}{8}$

II. ✓。

$$\begin{aligned} a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + a_9 - a_{10} &= \frac{a_1[1-(-r)^{10}]}{1-(-r)} \\ &= \frac{\frac{a_2}{r}(1-r^{10})}{1+r} \\ &\approx -1.24 < -1 \end{aligned}$$

III. ✓。

$$\begin{aligned} a_2 + a_4 + \ldots + &= \frac{a_2}{1-r^2} \\ &= \frac{81}{160} \\ &= \frac{9}{320\left(\frac{1}{18}\right)} \end{aligned}$$

結構式試題

31. (a) $A(1)+A(2)+A(3)+\ldots+A(n) = 1000(2+2^2+2^3+\ldots+2^n)$

$$= 1000 \times \frac{2(2^n-1)}{2-1} \qquad \text{1M}$$

$$= 2000(2^n-1) \qquad 1$$

(b) $B(1)+B(2)+B(3)+\ldots+B(n) > A(1)+A(2)+A(3)+\ldots+A(n)$

$$\frac{4(4^n-1)}{4-1} > 2000(2^n-1)$$

$$\frac{4}{3}(2^n)^2 - 2000(2^n) + \frac{5996}{3} > 0 \qquad \text{1A}$$

$2^n < 1$（捨去） 或 $2^n > 1499$

$$n\log 2 > \log 1499 \qquad \text{1M}$$

$$n > 10.5$$

n 的最小值為 11。 1A

32. (a) $S(n) = \dfrac{16\left[1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right]}{1-\frac{3}{4}}$ 1M

$$= 64\left[1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right] \qquad \text{1A}$$

(b) 所求之和 $= 64\left[1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^7\right]$

$$= \frac{14\,197}{256} \qquad \text{1A}$$

(c) $64\left[1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^k\right] > 60$ 1M

$$\left(\frac{3}{4}\right)^k < \frac{1}{16}$$

$$k\log\frac{3}{4} < \log\frac{1}{16} \qquad \text{1M}$$

$$k > 9.64$$

k 的最小值為 10。 1A

33. (a) 設首項及公比為 a 及 r。

$$\begin{cases} ar^4+ar^5+ar^6 = 6318 \\ a+ar+ar^2 = 78 \end{cases} \qquad \text{1M}$$

$$\frac{ar^4(1+r+r^2)}{a(1+r+r^2)} = \frac{6318}{78} \qquad \text{1M}$$

$$r^4 = 81$$

$$r = \pm 3 \qquad \text{1A}$$

當 $r=3$ 時，$a = \dfrac{78}{1+r+r^2} = 6$ 及 $T(n) = 6(3)^{n-1}$。

當 $r = -3$ 時，$a = \dfrac{78}{1+r+r^2} = \dfrac{78}{7}$ 及 $T(n) = \dfrac{78}{7}(-3)^{n-1}$。 1A

(b) (i) $T(n) = 6(3)^{n-1}$

$$\frac{6(3^m - 1)}{3 - 1} > 5000$$ 1M

$$3^m > \frac{5003}{3}$$

$$m \log 3 > \log \frac{5003}{3}$$ 1M

$$m > 6.75$$

m 的最小值為 7。 1A

(ii) 所求之和 $= \dfrac{6[(3^3)^8 - 1]}{3^3 - 1}$ 1M+1A

$\approx 6.52 \times 10^{10}$ 1A

34. (a) 設公比為 r。

$$\begin{cases} G_1 r + G_1 r^2 = 1944 \\ G_1 r^4 + G_1 r^5 = 72 \end{cases}$$

$$\frac{G_1 r^4(1+r)}{G_1 r(1+r)} = \frac{72}{1944}$$ 1M

$$r^3 = \frac{1}{27}$$

$$r = \frac{1}{3}$$ 1A

因此，$G_1 = \dfrac{1944}{r + r^2} = 4374$。 1A

(b) $\dfrac{4374}{1-\frac{1}{3}} - \dfrac{4374\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{3}} < 5 \times 10^{-19}$ 1M+1M

$$6561\left(\frac{1}{3}\right)^n < 5 \times 10^{-19}$$

$$\log 6561 + n \log \frac{1}{3} < \log 5 \times 10^{-19}$$ 1M

$$n > 46.4$$

n 的最小值為 47。 1A

35. 設首項及公比分別為 a 及 r，及 243 為第 n 項。
考慮由項 243 至無限項之和，

$$\frac{243}{1-r} = 4096 - 3367 + 243$$ 1M+1A

$$243 = 972 - 972r$$

$$r = \frac{3}{4}$$ 1A

考慮無限項之和，

$$\frac{a}{1-r} = 4096 \qquad \text{1M}$$

$$a = 1024 \qquad \text{1A}$$

首項為 1024。

– 試卷完 –