解	分
REG-2425-MOCK-SET 1-MATH-CP 1	
建議題解	
1. (a) $2a-3b=5(b+4)$	
$2a-3b=5b+20$	1M
$(-3-5)b=20-2a$	1M
$b=\dfrac{-10+a}{4}$	1A
(b) 30	1A
2. $\dfrac{4}{2x+3}+\dfrac{5}{6-7x}=\dfrac{4(6-7x)+5(2x+3)}{(2x+3)(6-7x)}$	1M
$=\dfrac{(-28+10)x+(24+15)}{(2x+3)(6-7x)}$	1M
$=\dfrac{39-18x}{(2x+3)(6-7x)}$	1A
3. $21^2+(25+a)^2=(9-4a)^2$	1M
$-15a^2+122a+985=0$	1M
$a=-5$ 或 $\dfrac{197}{15}$（捨去）	1A
4. (a) $9x^2-25=(3x+5)(3x-5)$	1A
(b) $3x^2y-7xy-20y=y(3x^2-7x-20)$	
$=y(3x+5)(x-4)$	1A
(c) $9x^2-25-3x^2y+7xy+20y=(3x+5)(3x-5)-y(3x+5)(x-4)$	1M
$=(3x+5)(3x-5-xy+4y)$	1A
5. 設標價為 $\$x$。	
$\dfrac{x}{1+75\%}-x(1-60\%)=1200$	2M+1A
$\dfrac{6x}{35}=1200$	1M
$x=7000$	1A
6. (a) $2(x-3)<\dfrac{4x+21}{4}$	
$x<\dfrac{45}{4}$	1A
$15-2x\le 7$	
$x\ge 4$	1A
因此，$4\le x<\dfrac{45}{4}$。	1M
(b) 8	1A

解	分
7. 設長度為 $5k$ cm。則闊度為 $3k$ cm。	1A
$\dfrac{5k+8}{3k+3}=\dfrac{16}{9}$	1M+1A
$45k+72=48k+48$	
$k=8$	
原來的闊度為 24 cm。	1A
8. (a) $1.36=\dfrac{0(2)+1(p)+2(5)+3(3)}{2+p+5+3}$	1M
$1.36(10+p)=19+p$	
$p=15$	1A
標準差 ≈ 0.794	1A
(b) 中位數 $=1$，眾數 $=1$。	
它們是相同的。	1A
9. (a) 設較小的半球體的半徑為 r cm。	
$\dfrac{2}{3}\pi r^3\left(1+\dfrac{125}{64}\right)=1008\pi$	1M
$r^3=512$	
$r=8$	1A
(b) 總表面面積 $=2\pi(8)^2+\pi(8)^2$	1M
$=192\pi\text{ cm}^2$	1A
10. (a) 設 $C=a+\dfrac{b}{n}$，其中 a 及 b 均為非零常數。	1A
$\begin{cases}1600=a+\dfrac{b}{200}\\1550=a+\dfrac{b}{400}\end{cases}$	1M
求解後，可得 $a=1500$ 及 $b=20\,000$。	1A
所求成本 $=1500+\dfrac{20\,000}{500}=\$1540$。	1A
(b) $2020=1500+\dfrac{20\,000}{n}$	1M
$n\approx 38.5$，不是整數	
不可能。	1A

解	分
11. (a) 設 $f(x) = (x^2 + 6x - 7)(Ax + B)$，其中 A 及 B 均為常數。	1M
$\begin{cases} f(-1) = 96 = (1 - 6 - 7)(-A + B) \\ f(2) = 9 = (4 + 12 - 7)(2A + B) \end{cases}$	1M
求解後，可得 $A = 3$ 及 $B = -5$。	
商式為 $3x - 5$。	1A
(b) $(x^2 + 6x - 7)(3x - 5) = 2x + 14$	
$(x + 7)(x - 1)(3x - 5) - 2(x + 7) = 0$	1M
$(x + 7)[(x - 1)(3x - 5) - 2] = 0$	
$(x + 7)(3x^2 - 8x + 3) = 0$	1A
$x = -7$ 或 $\dfrac{8 \pm \sqrt{8^2 - 4(3)(3)}}{2(3)}$	
$= -7$ 或 $\dfrac{4 \pm \sqrt{7}}{3}$	
由於 $\dfrac{4 \pm \sqrt{7}}{3}$ 為無理數，同意該宣稱。	1A
12. (a) 四分位數間距 $= 2.8 - 1.9$	1A
$= 0.9\text{ h}$	1A
(b) (i) $m = 2.4$	1A
$n = 1.1 + 2.0 = 3.1$	1A
(ii) 偉明的跑步時間的四分位數間距（0.9 小時）小於志誠（1.1 小時）。	1M
教練應選偉明。	1A
(iii) 根據過往表現，	
偉明破比賽紀錄的概率 $= \dfrac{5}{19}$；	1A
志誠破比賽紀錄的概率 $\leq 0.25 < \dfrac{5}{19}$。	
教練應選偉明。	1A

解	分
13. (a) $AB^2 + BC^2 - AC^2 = 5^2 + 12^2 - 13^2 = 0$	1M
故此，$AB^2 + BC^2 = AC^2$ 及 $\angle ABC = 90°$。	1A
(b) $\angle ADC = 180° - \angle ABC = 90°$	
設 $AD = DC = x$ cm。	
$x^2 + x^2 = 13^2$	1M
$x = \dfrac{13\sqrt{2}}{2}$	
所求周界 $= 5 + 12 + \dfrac{13\sqrt{2}}{2} \times 2$	1M
$= (17 + 13\sqrt{2})$ cm	1A
(c) 設 h 為由 D 至 AC 的最短距離。	
$\dfrac{1}{2}(h)(13) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{13\sqrt{2}}{2}\right)^2$	1M
$h = 6.5$	
點 F 不存在。	1A

解	分
14. (a) (i) $BC = CD$ （正方形性質）	
$\angle BCE = 45° = \angle DCE$ （正方形性質）	
$CE = CE$ （公共邊）	
$\triangle BCE \cong \triangle DCE$ （SAS）	

評分標準		
情況 1	附有正確理由的任何正確證明。	2
情況 2	未附有正確理由的任何正確證明。	1

(ii) $\angle GEB = \angle BEF$ （公共角）

$AF // CD$ （正方形性質）

$\angle BFE = \angle CDE$ （錯角，$AF // CD$）

$\angle GBE = \angle CDE$ （同位角，$\cong \triangle s$）

$= \angle BFE$

$\triangle BEG \sim \triangle FEB$ （AA）

評分標準		
情況 1	附有正確理由的任何正確證明。	2
情況 2	未附有正確理由的任何正確證明。	1

(b) 由於 $\triangle BEG \sim \triangle FEB$，$\dfrac{BE}{FE} = \dfrac{EG}{EB} = \dfrac{BG}{FB} = \tan\angle AFD$。	1M
由於 $BE = DE$，可得 $\dfrac{DE}{FE} = \dfrac{EG}{DE} = \tan\angle AFD$ 及 $EG = DE\tan\angle AFD$。	1M
$DE = (EG + FG)\tan\angle AFD$	
$= (DE\tan\angle AFD + FG)\tan\angle AFD$	
$= DE\tan^2\angle AFD + FG\tan\angle AFD$	
$< DE\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + FG\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$	1M
$DE < \dfrac{\sqrt{3}}{2}FG$	
同意該宣稱。	1A
15. (a) 方法數目 $= C_2^6 = 15$	1A
(b) 所求概率 $= 1 - \dfrac{15}{C_4^{12}}$	1M
$= \dfrac{32}{33}$	1A

解	分
16. (a) 直線的斜率 $= \dfrac{11-8}{3-0} = 1$	
$\log_2 y = x + 8$	1M
$y = 2^{x+8}$	
$= 256(2^x)$	
因此，$a = 256$ 及 $b = 2$。	1A+1A
(b) $256(2^{2t}) - 256(2^t) \ge 32\,768$	1M
$256(2^{2t}) - 256(2^t) - 32\,768 \ge 0$	
$2^t \ge 11.8$ 或 $2^t \le -10.8$（捨去）	
$t \log 2 \ge \log 11.8$	1M
$t \ge 3.56$	
t 的最小整數值為 4。	1A
17. (a) $f(x) = ax^2 + 8a^2x + 16a^3 + a$	
$= a(x^2 + 8ax + 16a^2) + a$	1M
$= a(x + 4a)^2 + a$	1M
頂點的坐標為 $(-4a,\ a)$。	1A
(b) (i) $y = f(x)$ 的圖像先向右平移 $5a$ 單位，	1A
然後沿 y 軸放大至原來的 4 倍。	1A
(ii) $(a,\ 4a)$	1A
(iii) OP 的斜率 $\times$ OQ 的斜率 $= \dfrac{a}{-4a} \times \dfrac{4a}{a} = -1$	
故此，$OP \perp OQ$。	1M
因此，$\triangle OPQ$ 的垂心在 O。	
垂心的坐標為 $(0,\ 0)$。	1A

解	分
18. (a) $30 + 30r + 30r^2 = 52.5$	1M
$30r^2 + 30r - 22.5 = 0$	
$r = \frac{1}{2}$ 或 $-\frac{3}{2}$（捨去）	1A
(b) 汽球的高度 $\leq \dfrac{30}{1 - \frac{1}{2}}$	1M
$= 60\text{ m} < 75\text{ m}$	
該汽球不能到達 75 m 的高度。	1A
(c) 設所需時間為 n 分鐘。	
$\dfrac{30(1 - 0.5^n)}{1 - 0.5} = 58.125$	1M
$0.5^n = 0.03125$	
$n \log 0.5 = \log 0.03125$	1M
$n = 5$	
所求時間為 5 分鐘。	1A

解	分
19. (a) 設 O 為圓 $ABCD$ 的外心。	
$\angle BAC = \angle DAC$ （已知）	
$\angle BOC = 2\angle BAC$ （圓心角兩倍於圓周角）	
$\angle DOC = 2\angle DAC$ （圓心角兩倍於圓周角）	
$= \angle BOC$	
$BC = CD$ （等角對等弦）	

評分標準		
情況 1	附有正確理由的任何正確證明。	3
情況 2	未附有理由的任何正確證明。	2
情況 3	附有一正確理由和一正確步驟之未完整的證明。	1

解	分
(b) (i) 設 M 的坐標為 $(a,\ -a)$ 使得它在 $y = -x$ 上。	
$\sqrt{(a-0)^2+(-a-0)^2} = \sqrt{(a+200)^2+(-a+600)^2}$	1M
$2a^2 = 2a^2 - 800a + 400\,000$	
$a = 500$	
所求方程為	
$(x-500)^2+(y+500)^2 = (0-500)^2+(0+500)^2$	
$(x-500)^2+(y+500)^2 = 500\,000$	1A
M 的坐標為 $(500,\ -500)$。	1A
(ii) $(0-500)^2+(y+500)^2 = 500\,000$	
$(y+500)^2 = 250\,000$	
$y = -1000$ 或 0（捨去）	
C 的坐標為 $(0,\ -1000)$。	1A
(c) 設 K 為 VC 上的一點使得 $BK \perp VC$。	
則 $DK \perp VC$ 及所求之角為 $\angle BKD$。	
$BM = CM = DM = \sqrt{(500+200)^2+(-500+600)^2} = 500\sqrt{2}$	1M
$BC = CD = \sqrt{200^2+(-1000+600)^2} = 200\sqrt{5}$	
$VB = VC = VD = \sqrt{MB^2+50^2} = 50\sqrt{201}$	
$MB^2 = MC^2 + BC^2 - 2(MC)(BC)\cos\angle BCM$	
$\angle BCM \approx 71.6^\circ$	
$BD = 2 \times BC \sin\angle BCM \approx 849$	1M
$VB^2 = VC^2 + BC^2 - 2(VC)(BC)\cos\angle VCB$	
$\angle VCB \approx 71.6^\circ$	
$DK = BK = BC\sin\angle VCB \approx 424$	
$BD^2 = BK^2 + DK^2 - 2(BK)(DK)\cos\angle BKD$	1M
$\angle BKD \approx 177^\circ$	1A