

REG-2324-MOCK-SET 3-MATH-EP(M2)

建議題解

1. $(1+ax)^2(1+2x)^n$ $= (1+2ax+a^2x^2) [1+2C_1^n x+4C_2^n x^2+\dots+2^n x^n]$ $\begin{cases} 2n+2a=16 \\ 4C_2^n+4an+a^2=109 \end{cases}$ $\frac{4n(n-1)}{2}+4n(8-n)+(8-n)^2=109$ $-n^2+14n-45=0$ $n=5 \quad \text{或} \quad 9$	1M 1M 1M 1A 1A
2. $f(2+h) = \sqrt{4(2+h) - (2+h)^2}$ $= \sqrt{4-h^2}$ $f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h}$ $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4-h^2}-\sqrt{8-4}}{h}$ $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(4-h^2)-4}{h(\sqrt{4-h^2}+2)}$ $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{\sqrt{4-h^2}+2}$ $= 0$	1A 1M 1M 1A
3. (a) $\int \ln x \, dx = x \ln x - \int dx$ $= x \ln x - x + \text{常數}$ (b) 體積 $= \pi \int_1^3 \frac{\ln y}{\ln 3} \, dy$ $= \frac{\pi}{\ln 3} \left[y \ln y - y \right]_1^3$ $= 3\pi - \frac{2\pi}{\ln 3}$	1M+1A 1A 1M+1A 1M 1A

解	分
4. (a) $\overrightarrow{OP} = \frac{3}{3+1}\mathbf{a} + \frac{1}{3+1}\mathbf{b}$ $= \frac{3}{4}\mathbf{a} + \frac{1}{4}\mathbf{b}$ (b) (i) $30^2 = \overrightarrow{OP} ^2$ $900 = \frac{9}{16}\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + \frac{3}{8}\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \frac{1}{16}\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}$ $= \frac{9}{16}(36)^2 + \frac{3}{8}\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \frac{1}{16}(24)^2$ $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 360$ (ii) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \mathbf{b} \cos \angle AOB$ $360 = (36)(24) \cos \angle AOB$ $\angle AOB = \cos^{-1} \frac{5}{12}$	1M 1A 1M 1A 1A 1M 1A
5. (a) $\det M = ab - 6ab$ $= -5ab$ $\neq 0 \quad (a > 0 \text{ 及 } b > 0)$ 因此，M 為非奇異矩陣。 (b) $\begin{pmatrix} 1 & 13 \\ -10 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 3b \\ 2a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 3a \\ 3b & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -10 \\ 13 & 1 \end{pmatrix}$ 比較矩陣右上角的元素。 $13b + 3b = -10a + 2a$ $a = -2b$ (c) $M^T = \begin{pmatrix} a & 2a \\ 3b & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2b & -4b \\ 3b & b \end{pmatrix}$ $(M^T)^{-1} = \frac{1}{-2b^2 + 12b^2} \begin{pmatrix} b & 4b \\ -3b & -2b \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} \frac{1}{10b} & \frac{2}{5b} \\ -\frac{3}{10b} & -\frac{1}{5b} \end{pmatrix}$	1 1M 1A 1A 1M 1A

解	分
6. (a) 當 $n = 1$, 左式 $= (-1)^1(1)^2 = -1$, 右式 $= \frac{(-1)(1)(1+1)}{2} = -1 =$ 左式 對 $n = 1$, 命題為真。 假設 $\sum_{k=1}^p (-1)^k k^2 = \frac{(-1)^p p(p+1)}{2}$, 其中 $p \in \mathbb{Z}^+$ 。 $\begin{aligned} \sum_{k=1}^{p+1} (-1)^k k^2 &= \sum_{k=1}^p (-1)^k k^2 + (-1)^{p+1} (p+1)^2 \\ &= \frac{(-1)^p p(p+1)}{2} + (-1)^{p+1} (p+1)^2 \\ &= \frac{(-1)^{p+1} (p+1)}{2} [-p + 2(p+1)] \\ &= \frac{(-1)^{p+1} (p+1)(p+2)}{2} \end{aligned}$ 對 $n = p+1$, 命題為真。 藉數學歸納法, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, 命題為真。 (b) $\sum_{k=3}^{333} (-1)^{k+1} k^2 = - \left[\sum_{k=1}^{333} (-1)^k k^2 - \sum_{k=1}^2 (-1)^k k^2 \right]$ $\begin{aligned} &= - \left[\frac{-333(334)}{2} - (-1 + 4) \right] \\ &= 55\,614 \end{aligned}$ 7. (a) $\tan 3\beta = \frac{\tan 2\beta + \tan \beta}{1 - \tan 2\beta \tan \beta}$ $\begin{aligned} &= \frac{\frac{2 \tan \beta}{1 - \tan^2 \beta} + \tan \beta}{1 - \frac{2 \tan \beta}{1 - \tan^2 \beta} \cdot \tan \beta} \\ &= \frac{3 \tan \beta - \tan^3 \beta}{1 - 3 \tan^2 \beta} \end{aligned}$ (b) $\tan 3x = \cot x$ $\begin{aligned} \tan 3x &= \tan \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \\ 3x &= \frac{\pi}{2} - x \\ x &= \frac{\pi}{8} \end{aligned}$ (c) 取 $\beta = \frac{\pi}{8}$, 可得 $\tan 3\beta = \cot \beta$ 。 $\begin{aligned} \frac{3 \tan \beta - \tan^3 \beta}{1 - 3 \tan^2 \beta} &= \frac{1}{\tan \beta} \\ \tan^4 \beta - 6 \tan^2 \beta + 1 &= 0 \\ \tan^2 \beta &= \frac{6 \pm \sqrt{6^2 - 4(1)(1)}}{2(1)} \\ &= 3 \pm 2\sqrt{2} \end{aligned}$ 由於 $\tan \beta = \tan \frac{\pi}{8} < 1$, 可得 $\tan^2 \beta = 3 - 2\sqrt{2}$ 。	1 1 1M 1M 1 1M 1A 1M 1A 1M 1A 1A 1M 1A

解	分
8. (a) $0 = \begin{vmatrix} k & 2 & -1 \\ 1 & k & 3 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ $= k^2 + 6 - 4 + k - 2 - 12k$ $= k^2 - 11k$ $k = 0 \text{ 或 } 11$ (b) 代 $k = 0$，可得 $\begin{cases} 2y - z = 0 \\ x + 3z = 0 \\ x + 4y + z = 0 \end{cases}$ 設 $z = t$，其中 $t \in \mathbb{R}$。 解集為 $\left\{ \left(-3t, \frac{t}{2}, t \right) : t \in \mathbb{R} \right\}$。 (c) 首三條方程的解為 $\left\{ \left(-3t, \frac{t}{2}, t \right) : t \in \mathbb{R} \right\}$。 $t^2 + \frac{t}{2}(-3t + 2) = 0$ $-\frac{t^2}{2} + t = 0$ $t = 0 \text{ 或 } 2$ 解為 $(0, 0, 0)$ 或 $(-6, 1, 2)$。	1M 1A 1M 1A 1M 1A 1A

解	分										
9. (a) $f'(x) = \frac{2x(x-3) - (x^2 + a)}{(x-3)^2}$ $= \frac{x^2 - 6x - a}{(x-3)^2}$ $0 = \frac{5^2 - 6(5) - a}{(5-3)^2}$ $a = -5$	1A										
(b) $f'(x) = \frac{x^2 - 6x + 5}{(x-3)^2} = \frac{(x-1)(x-5)}{(x-3)^2}$ 當 $f'(x) = 0$, $x = 1$ 或 5 。 <table> <tr> <td>x</td> <td>$x < 1$</td> <td>$1 < x < 3$</td> <td>$3 < x < 5$</td> <td>$x > 5$</td> </tr> <tr> <td>$f'(x)$</td> <td>+</td> <td>-</td> <td>-</td> <td>+</td> </tr> </table> C 的極大點為 $(1, 2)$ 。	x	$x < 1$	$1 < x < 3$	$3 < x < 5$	$x > 5$	$f'(x)$	+	-	-	+	1M 1A
x	$x < 1$	$1 < x < 3$	$3 < x < 5$	$x > 5$							
$f'(x)$	+	-	-	+							
(c) $f(x) = \frac{x^2 - 5}{x - 3}$ $= x + 3 + \frac{4}{x - 3}$ 斜漸近線為 $y = x + 3$ 。垂直漸近線為 $x = 3$ 。	1M 1A										
(d) $\frac{x^2 - 5}{x - 3} = 0$ $x = \pm\sqrt{5}$ 面積 = $\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} \frac{x^2 - 5}{x - 3} dx$ $= \int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} \left(x + 3 + \frac{4}{x - 3} \right) dx$ $= \left[\frac{x^2}{2} + 3x + 4 \ln x - 3 \right]_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}}$ $= 6\sqrt{5} + 4 \ln \frac{3 - \sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}}$ $= 6\sqrt{5} + 4 \ln \frac{7 - 3\sqrt{5}}{2}$	1A 1M 1A 1A										

解	分
10. (a) (i) $\frac{\sin 3x}{\sin x} - (2 \cos 2x + 1) = \frac{1}{\sin x} [\sin 3x - 2 \sin x \cos 2x - \sin x]$ $= \frac{1}{\sin x} [\sin 3x - (\sin 3x - \sin x) - \sin x]$ $= 0$ 因此, $\frac{\sin 3x}{\sin x} = 2 \cos 2x + 1$。 (ii) 代 $x = \frac{\pi}{4} + y$。 $\frac{\sin 3\left(\frac{\pi}{4} + y\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + y\right)} = 2 \cos 2\left(\frac{\pi}{4} + y\right) + 1$ $\frac{\sin \frac{3\pi}{4} \cos 3y + \cos \frac{3\pi}{4} \sin 3y}{\sin \frac{\pi}{4} \cos y + \cos \frac{\pi}{4} \sin y} = -2 \sin 2y + 1$ $\frac{\cos 3y - \sin 3y}{\cos y + \sin y} = -2 \sin 2y + 1$ $\frac{\sin 3y - \cos 3y}{\sin x + \cos y} = 2 \sin 2y - 1$	1M 1 1A 1A
(b) (i) 設 $u = a - x$。則 $du = -dx$。 $\int_0^a f(x) dx = - \int_a^0 f(a - u) du$ $= \int_0^a f(a - u) du$ $= \int_0^a f(a - x) dx$ (ii) 代 $f(x) = \frac{\sin 3x}{\sin x + \cos x}$。 $f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\sin 3\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \frac{-\cos 3x}{\cos x + \sin x}$ 可得 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 3x}{\sin x + \cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-\cos 3x}{\sin x + \cos x} dx$。 $2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 3x}{\sin x + \cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 3x}{\sin x + \cos x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-\cos 3x}{\sin x + \cos x} dx$ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 3x}{\sin x + \cos x} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 3x - \cos 3x}{\sin x + \cos x} dx$	1M 1A 1 1A 1M 1A
(c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 3x}{\sin x + \cos x} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \sin 2x - 1) dx$ $= \frac{1}{2} \left[-\cos 2x - x \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$ $= 1 - \frac{\pi}{4}$	1M 1A 1A

解	分
11. (a) $M^2 = \begin{pmatrix} -3 & -28 \\ 4 & 29 \end{pmatrix} = aM + bI$	1A
則 $2a + b = -3$ 、 $7a = -28$ 、 $-a = 4$ 及 $-6a + b = 29$ 。	1M
求解後，可得 $a = -4$ 及 $b = 5$ 。	1A
(b) 當 $n = 1$ ，	
右式 $= (1 - (-5))M + (5 - 5)I = 6M =$ 左式	
對 $n = 1$ ，命題為真。	
假設 $6M^k = (1 - (-5)^k)M + (5 + (-5)^k)I$ ，其中 $k \in \mathbb{Z}^+$ 。	1
$6M^{k+1} = M(6M^k)$	
$= M[(1 - (-5)^k)M + (5 + (-5)^k)I]$	1
$= (1 - (-5)^k)M^2 + (5 + (-5)^k)M$	
$= (1 - (-5)^k)(-4M + 5I) + (5 + (-5)^k)M$	
$= (1 - (-5)^{k+1})M + (5 + (-5)^{k+1})I$	
對 $n = k + 1$ ，命題為真。	1
藉數學歸納法， $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ ，命題為真。	1
(c) 利用 (b)， $M^n = \left[\frac{1}{6}M + \frac{5}{6}I\right] + (-5)^n \left[\frac{1}{6}I - \frac{1}{6}M\right]$ 。	
設定 $A = \frac{1}{6}M + \frac{5}{6}I = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ 及 $B = \frac{1}{6}I - \frac{1}{6}M = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 & -7 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$ 。	1A
留意 $A^2 = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = A$ 、 $B^2 = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 & -7 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} = B$ 、 $AB = BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 。	1M
$M^n \left(A + \frac{1}{(-5)^n} B \right) = [A + (-5)^n B] \left[A + \frac{1}{(-5)^n} B \right]$	1M
$= A^2 + (-5)^n BA + \frac{1}{(-5)^n} AB + B^2$	
$= A + B$	
$= I$	1M
因此，對所有正整數 n ， $(M^n)^{-1} = A + \frac{1}{(-5)^n} B$ 。	
所求矩陣 A 及 B 存在。	1

