

REG-2324-MOCK-SET 1-MATH-EP(M2)

建議題解

1. $f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h) \ln(2+h-1) - 2 \ln 1}{h}$	1M
$= \lim_{h \rightarrow 0} (2+h) \ln(1+h)^{\frac{1}{h}}$	1M
$= (2+0)(\ln e)$	1A
$= 2$	1A
2. (a) $P(x) = (x-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 4 & x-\lambda \\ (x-\lambda)^3 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & x-\lambda \end{vmatrix}$	
$= 20(x-\lambda)^2 - (x-\lambda)^6 + 3(x-\lambda) - 8$	1A
$-1195 = 20 - C_2^6(-\lambda)^4$	1M
$\lambda^4 = 81$	
$\lambda = 3 \text{ 或 } -3 \text{ (捨去)}$	1A
(b) $P'(x) = 40(x-3) - 6(x-3)^5 + 3$	1A
$P''(x) = 40 - 30(x-3)^4$	
$P''(\lambda) = 40$	1A
3. (a) $\frac{1 - \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta} = \frac{1 - \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}}{1 + \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}}$	
$= \frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}$	1M
$= \frac{\cos 2\theta}{1}$	
$= \cos 2\theta$	1
(b) $\cos \frac{3\pi}{4} = \frac{1 - \tan^2 \frac{3\pi}{8}}{1 + \tan^2 \frac{3\pi}{8}}$	1M
$-\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 - \tan^2 \frac{3\pi}{8}}{1 + \tan^2 \frac{3\pi}{8}}$	1A
$-1 - \tan^2 \frac{3\pi}{8} = \sqrt{2} \left(1 - \tan^2 \frac{3\pi}{8} \right)$	
$\tan^2 \frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1}$	1A
$= \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} \times \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} + 1}$	1M
$= \frac{3 + 2\sqrt{2}}{2 - 1}$	
$= 3 + 2\sqrt{2}$	1

解	分
4. (a) $A^2 - mA = nI$ $A\left(\frac{1}{n}A - \frac{m}{n}I\right) = I$ 因此, $A^{-1} = \frac{1}{n}A - \frac{m}{n}I$。 (b) $A^3 = A^2A$ $= (mA + nI)A$ $= m(mA + nI) + nA$ $= (m^2 + n)A + mnI$ (c) 當 $m^2 + n = -\frac{1}{n}$ 及 $mn = \frac{m}{n}$, $A^3 = -A^{-1}$。 $mn = \frac{m}{n}$ $0 = m\left(\frac{1}{n} - n\right)$ $n = 1$ (捨去) 或 -1 或 $m = 0$ (捨去) 對 $n = 1$, 可得 $m = \sqrt{2}$, $A^3 = A - \sqrt{2}I$ 及 $A^{-1} = -A + \sqrt{2}I = -A^3$。	1M 1A 1M 1 1M 1A 1
5. (a) $W = \int (-10 - t) dt$ $= -10t - \frac{t^2}{2} + C \text{ 其中 } C \text{ 為一常數。}$ 由於當 $t = 0$ 時, $W = 540$, 可得 $C = 540$。 故此, $W = -10t - \frac{t^2}{2} + 540$。 當 $t = 24$, 可得 $W = 12 > 0$。 因此, 該宣稱不正確。 (b) 當 $t = 20$, $\frac{dW}{dt} = -10 - 20 = -30$ 及 $W = -10(20) - \frac{20^2}{2} + 540 = 140$。 $140 = 5x^2 + 3x$ $0 = 5x^2 + 3x - 140$ $x = 5$ 或 $-\frac{28}{5}$ (捨去) $\frac{dW}{dt} = (10x + 3) \frac{dx}{dt}$ $-10 - 20 = [10(5) + 3] \frac{dx}{dt}$ $\frac{dx}{dt} = -\frac{30}{53}$	1M 1M 1A 1A 1M 1A

解	分
6. (a) 當 $n = 1$, 左式 = $\frac{1}{(1)(3)} + \frac{1}{(3)(5)} = \frac{2}{5}$ 及右式 = $\frac{1+1}{(1)(5)} = \frac{2}{5} =$ 左式 對 $n = 1$, 命題為真。 假設 $\sum_{k=p}^{2p} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{k+1}{(2k-1)(4k+1)}$, 其中 $k \in \mathbb{Z}^+$ 。 $\sum_{k=p+1}^{2p+2} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$ $= \sum_{k=p}^{2p} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} - \frac{1}{(2p-1)(2p+1)} + \frac{1}{(4p+1)(4p+3)} + \frac{1}{(4p+3)(4p+5)}$ $= \frac{p+1}{(2p-1)(4p+1)} - \frac{1}{(2p-1)(2p+1)} + \frac{(4p+5) + (4p+1)}{(4p+1)(4p+3)(4p+5)}$ $= \frac{(p+1)(2p+1) - (4p+1)}{(2p-1)(2p+1)(4p+1)} + \frac{2}{(4p+1)(4p+5)}$ $= \frac{p(2p-1)}{(2p-1)(2p+1)(4p+1)} + \frac{2}{(4p+1)(4p+5)}$ $= \frac{p(4p+5) + 2(2p+1)}{(2p+1)(4p+1)(4p+5)}$ $= \frac{(p+2)(4p+1)}{(2p+1)(4p+1)(4p+5)}$ $= \frac{p+2}{(2p+1)(4p+5)}$ 對 $n = p+1$, 命題為真。 藉數學歸納法, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, 命題為真。 (b) $\sum_{k=505}^{2020} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$ $= \sum_{k=505}^{1010} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} + \sum_{k=1010}^{2020} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} - \frac{1}{(2019)(2021)}$ $= \frac{506}{(1009)(2021)} + \frac{1011}{(2019)(4041)} - \frac{1}{(2019)(2021)}$ $\approx 3.72 \times 10^{-4}$	1 1 1M 1 1 1 1A

解		分						
7. (a)	$y = \int xe^{-2x} \, dx$	1M						
	$= \frac{xe^{-2x}}{-2} + \frac{1}{2} \int e^{-2x} \, dx$	1M						
	$= -\frac{xe^{-2x}}{2} - \frac{e^{-2x}}{4} + C$ 其中 C 為一常數。							
	$\frac{1}{4} = 0 - \frac{1}{4} + C$	1M						
	$C = \frac{1}{2}$							
	Γ 的方程為 $y = -\frac{xe^{-2x}}{2} - \frac{e^{-2x}}{4} + \frac{1}{2}$ 。	1A						
(b)	$f''(x) = (1 - 2x)e^{-2x}$							
	當 $f''(x) = 0$, $x = \frac{1}{2}$ 。							
	<table><tr><td>x</td><td>$x < \frac{1}{2}$</td><td>$x > \frac{1}{2}$</td></tr><tr><td>$f''(x)$</td><td>+</td><td>-</td></tr></table>	x	$x < \frac{1}{2}$	$x > \frac{1}{2}$	$f''(x)$	+	-	1M
x	$x < \frac{1}{2}$	$x > \frac{1}{2}$						
$f''(x)$	+	-						
	Γ 在 $x = \frac{1}{2}$ 有一拐點。							
	不同意該宣稱。	1A						

8. (a) $g'(x) = e^x(\cos x - \sin x)$

當 $g'(x) = 0$,

$$\cos x - \sin x = 0$$

$$\tan x = 1$$

$$x = \frac{\pi}{4}$$

x	$0 < x < \frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4} < x < \pi$
$g'(x)$	+	-

因此， G 只有一個極大點。

1A

1

(b)
$$\int e^{2x} \cos 2x \, dx = \frac{e^{2x} \cos 2x}{2} + \int e^{2x} \sin 2x \, dx$$

$$= \frac{e^{2x} \cos 2x}{2} + \frac{e^{2x} \sin 2x}{2} - \int e^{2x} \cos 2x \, dx$$

1M

$$2 \int e^{2x} \cos 2x \, dx = \frac{e^{2x}(\sin 2x + \cos 2x)}{2} + \text{常數}$$

1M

$$\int e^{2x} \cos 2x \, dx = \frac{e^{2x}(\sin 2x + \cos 2x)}{4} + \text{常數}$$

1A

(c) 體積 = $\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} (e^x \cos x)^2 \, dx$

1M

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{2x} \cos 2x \, dx + \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{2x} \, dx$$

1M

$$= \frac{\pi}{2} \left[\frac{e^{2x}(\sin 2x + \cos 2x)}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{\pi}{2} \left[\frac{e^{2x}}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{3\pi(e^{\frac{\pi}{2}} - 1)}{8}$$

1A

解	分										
9. (a) 垂直漸近線為 $x = -\frac{1}{2}$ 。	1A										
$f(x) = \frac{x^2 - 4x}{2x + 1}$ $= \frac{x}{2} - \frac{9}{4} + \frac{9}{4(2x + 1)}$	1M										
斜漸近線為 $y = \frac{x}{2} - \frac{9}{4}$ 。	1A										
(b) $f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{9}{4}(2x + 1)^{-2}(2)$ $= \frac{1}{2} - \frac{9}{2(2x + 1)^2}$	1M 1A										
(c) $\frac{1}{2} - \frac{9}{2(2x + 1)^2} = 0$ $(2x + 1)^2 = 9$ $x = -2 \text{ 或 } 1$ <table><tr><td>x</td><td>$x < -2$</td><td>$-2 < x < -\frac{1}{2}$</td><td>$-\frac{1}{2} < x < 1$</td><td>$x > 1$</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td>+</td><td>-</td><td>-</td><td>+</td></tr></table>	x	$x < -2$	$-2 < x < -\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} < x < 1$	$x > 1$	$f'(x)$	+	-	-	+	1M
x	$x < -2$	$-2 < x < -\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} < x < 1$	$x > 1$							
$f'(x)$	+	-	-	+							
極大點為 $(-2, -4)$ 及極小點為 $(1, -1)$ 。	1A+1A										
(d) $0 = \frac{x^2 - 4x}{2x + 1}$ $x = 0 \text{ 或 } 4$ 面積 $= \int_0^4 [-f(x)] \, dx$ $= \int_0^4 \left(\frac{9}{4} - \frac{x}{2} - \frac{9}{4(2x + 1)} \right) \, dx$ $= \left[\frac{9x}{4} - \frac{x^2}{4} - \frac{9}{8} \ln 2x + 1 \right]_0^4$ $= 5 - \frac{9}{8} \ln 9$	1M+1A 1M 1A										

解	分
10. (a) $\frac{A}{u^2+1} + \frac{B}{u^2+4} = \frac{A(u^2+4) + B(u^2+1)}{(u^2+1)(u^2+4)}$ $= \frac{(A+B)u^2 + (4A+B)}{(u^2+1)(u^2+4)}$ 比較同類項，可得 $A+B=0$ 及 $4A+B=1$。 求解後，可得 $A = \frac{1}{3}$ 及 $B = -\frac{1}{3}$。 因此，$\frac{1}{(u^2+1)(u^2+4)} = \frac{1}{3(u^2+1)} - \frac{1}{3(u^2+4)}$。	1M 1A
(b) 設 $u = -x$。則 $du = -dx$。 $\begin{aligned} \int_{-a}^a f(x) dx &= \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx \\ &= -\int_a^0 f(-u) du + \int_0^a f(x) dx \\ &= \int_0^a f(u) du + \int_0^a f(x) dx \\ &= 2 \int_0^a f(x) dx \end{aligned}$	1M 1M 1
(c) (i) $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{du}{(u^2+1)(u^2+4)}$ $= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{3(u^2+1)} - \frac{1}{3(u^2+4)} \right) du$ $= \frac{1}{3} \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sec^2 \theta}{\tan^2 \theta + 1} d\theta - \frac{1}{3} \int_{-\tan^{-1} \frac{\sqrt{3}}{2}}^{\tan^{-1} \frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{2 \sec^2 \phi}{4 \tan^2 \phi + 4} d\phi$ 其中 $u = \tan \theta$ 及 $u = 2 \tan \phi$ $= \frac{1}{3} \left[\theta \right]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} - \frac{1}{6} \left[\phi \right]_{-\tan^{-1} \frac{\sqrt{3}}{2}}^{\tan^{-1} \frac{\sqrt{3}}{2}}$ $= \frac{2\pi}{9} - \frac{1}{3} \tan^{-1} \frac{\sqrt{3}}{2}$	1M 1M+1A 1A
(ii) $\frac{1}{\tan^2(-x)+4} = \frac{1}{\tan^2 x + 4}$ 設 $u = \tan x$。則 $du = \sec^2 \theta dx$。 $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\tan^2 x + 4} = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\tan^2 x + 4}$ $= \frac{1}{2} \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{du}{(u^2+1)(u^2+4)}$ $= \frac{\pi}{9} - \frac{1}{6} \tan^{-1} \frac{\sqrt{3}}{2}$	1M 1M 1A

解		分
11. (a) (i)	$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & a & 1 \\ 4 & 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - 3a + 2$ $= (a-1)(a-2)$ 由於 (E) 有唯一的解，$a^2 - 3a + 2 \neq 0$。 因此，可得 $a \neq 1$ 及 $a \neq 2$。	1A
(ii)	當 $a = 2$，(E) 的增廣矩陣為 $\left(\begin{array}{ccc c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & b \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 7 \\ 0 & -3 & -2 & b-16 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & b-9 \end{array} \right)$ 當 (E) 有解，$b = 9$。 (E) 的解集為 $\left\{ \left(\frac{5-t}{3}, \frac{7-2t}{3}, t \right) : t \in \mathbb{R} \right\}$。	1A
(b)	解集為 $\left\{ \left(\frac{5-t}{3}, \frac{7-2t}{3}, t \right) : t \in \mathbb{R} \right\}$。 $p \left(\frac{5-t}{3} \right) = \left(\frac{7-2t}{3} \right) t$ $0 = -\frac{2t^2}{3} + \left(\frac{7+p}{3} \right) t - \frac{5p}{3}$ $\Delta = \left(\frac{7+p}{3} \right)^2 - 4 \left(-\frac{2}{3} \right) \left(-\frac{5p}{3} \right) \geq 0$ $\frac{p^2}{9} - \frac{26p}{9} + \frac{49}{9} \geq 0$ $p \leq 13 - 2\sqrt{30} \quad \text{或} \quad p \geq 13 + 2\sqrt{30}$	1M
(c)	$\left(\begin{array}{ccc c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \\ 8 & 2 & 2 & 11 \\ 3 & 5 & 5 & 19 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 7 \\ 0 & -6 & -6 & -21 \\ 0 & 2 & 2 & 7 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$ 故此，(F) 有解。 解集為 $\left\{ \left(\frac{1}{2}, \frac{7-2s}{2}, s \right) : s \in \mathbb{R} \right\}$。	1M
		1A
		1A

解	分
12. (a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ $(16 - a)\mathbf{i} + (b - 6)\mathbf{j} - 6\mathbf{k} = 10\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + (c + 3)\mathbf{k}$ 可得 $a = 6$、$b = 3$ 及 $c = -9$。 (b) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AD} = 6 - 6 + 0 = 0$ (c) $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 10 & -3 & -6 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ $= -6\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$ (d) (i) 設 $\mathbf{n} = -\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = 6\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$。 $\overrightarrow{OE} = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}} \mathbf{n}$ $= \frac{36 + 36 - 21}{36 + 36 + 49} (6\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 7\mathbf{k})$ $= \frac{51}{121} (6\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 7\mathbf{k})$ 所求距離 $= \frac{51}{121} \sqrt{6^2 + 6^2 + 7^2}$ $= \frac{51}{11}$ (ii) $OA = \sqrt{6^2 + 6^2 + 3^2} = 9$ 設 θ 為 OA 與平面 $ABCD$ 間的夾角。 $\sin \theta = \frac{\left(\frac{51}{11}\right)}{9}$ $\theta = \sin^{-1} \frac{51}{99}$ (iii) 由於 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$ 且 E 為 O 在 $ABCD$ 上的投影，$\angle OAD = \angle EAD = 90^\circ$。 $\triangle OAD$ 與平面 $ABCD$ 間的夾角為 $\angle OAE$。 同意該宣稱。	1M 1A+1A 1A 1A 1M 1A 1M 1A 1M 1A 1M 1A