DAYCP-EOC-2425-ASM-SET 1-MATH
建議題解

多項選擇題

1. A	2. A	3. B	4. A	5. A
6. B	7. B	8. B	9. A	10. D
11. D	12. C	13. D	14. A	15. C
16. D	17. B	18. D	19. B	20. C

1. $\boxed{\text{A}}$

C_1: $x^2 + y^2 - 18x - 24y + 176 = 0$
C_2: $x^2 + y^2 - 36x - 48y + 836 = 0$
G_1 及 G_2 的坐標分別為 $(9,\ 12)$ 及 $(18,\ 24)$。
P 的坐標為 $(18,\ 0)$。

I. ✓。
$PG_1 = \sqrt{(18-9)^2 + (12-0)^2} = 15$
$G_1G_2 = \sqrt{(18-9)^2 + (24-12)^2} = 15 = PG_1$
$\triangle PG_1G_2$ 為等腰三角形。

II. ✓。
$\triangle PG_1G_2$ 的面積 $= \dfrac{(24-0)(18-9)}{2} = 108$
$\triangle OPG_1$ 的面積 $= \dfrac{(18-0)(12-0)}{2} = 108$

III. ✗。
C_1 的半徑 $= \sqrt{9^2 + 12^2 - 176} = 7$
C_2 的半徑 $= \sqrt{18^2 + 24^2 - 836} = 8$
留意 G_1G_2 等於 C_1 及 C_2 的半徑之和。
C_1 與 C_2 外切。

2. $\boxed{\text{A}}$

$x^2 + y^2 + \dfrac{kx}{2} + 6y = 0$

圓心的坐標為 $\left(-\dfrac{k}{4},\ -3\right)$。

$$3\left(-\frac{k}{4}\right) - 2(-3) + 6 = 0$$

$$k = 16$$

圓心的坐標為 $(-4,\ -3)$。

半徑 $= \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

3. $\boxed{\text{B}}$

I. ✓。

$\left(\dfrac{m}{2}\right)^2 + \left(-\dfrac{m}{2}\right)^2 + 2m\left(\dfrac{m}{2}\right) + 2m\left(-\dfrac{m}{2}\right) + m^2$

$= \dfrac{3m^2}{2}$

> 0

點 $\left(\dfrac{m}{2},\ -\dfrac{m}{2}\right)$ 位於 C 以外。

II. ✗。

圓心的坐標為 $(-m,\ -m)$。

圓周 $= 2\pi\sqrt{m^2 + m^2 - m^2}$

$= 2\pi\sqrt{m^2}$

取 $m = -1$，C 的圓周為 2π，不等於 $2m\pi$。

III. ✓。

圓心的坐標為 $(-m,\ -m)$。

4. $\boxed{\text{A}}$

C: $x^2 + y^2 - kx - ky + \dfrac{k^2}{4} = 0$

I. ✗。

C 的圓心的坐標為 $\left(\dfrac{k}{2},\ \dfrac{k}{2}\right)$。

II. ✓。

$$\text{面積} = \pi\left(\sqrt{\left(\frac{k}{2}\right)^2 + \left(\frac{k}{2}\right)^2 - \frac{k^2}{4}}\right)^2$$

$$= \frac{\pi k^2}{4}$$

III. ✗。

$(0)^2 + (0)^2 - k(0) - k(0) + \dfrac{k^2}{4} = \dfrac{k^2}{4} > 0$

原點位於 C 以外。

5. $\boxed{\text{A}}$

C: $x^2 + y^2 - 4x - ky - 20 = 0$

圓心的坐標為 $\left(2,\ \dfrac{k}{2}\right)$。

$$\sqrt{2^2 + \left(\frac{k}{2}\right)^2 + 20} = 5$$

$$24 + \frac{k^2}{4} = 25$$

$$k^2 = 4$$

$$k = \pm 2$$

由於 C 的圓心位於第四象限，可得 $\dfrac{k}{2} < 0$。

因此，$k = -2$。

6. $\boxed{\text{B}}$

G_1 及 G_2 的坐標分別為 $(0,\ 25)$ 及 $(12,\ 9)$。

I. ✓。

$G_1G_2 = \sqrt{(12-0)^2 + (25-9)^2} = 20$

II. ✗。

OG_2 的斜率 $= \dfrac{9-0}{12-0} = \dfrac{3}{4}$

G_1G_2 的斜率 $= \dfrac{25-9}{0-12} = -\dfrac{4}{3} = -1 \div \dfrac{3}{4}$

因此，$\angle OG_2G_1 = 90^\circ \neq 45^\circ$。

III. ✓。

$$\begin{aligned} \text{半徑} &= \frac{OG_1}{2} \\ &= \frac{25-0}{2} \\ &= 12.5 \end{aligned}$$

7. $\boxed{\text{B}}$

圓心的坐標為 $(-6,\ 4)$。

$$\begin{aligned} \text{面積} &= \pi\left(\sqrt{6^2 + 4^2 - 9}\right)^2 \\ &= 43\pi \end{aligned}$$

8. $\boxed{\text{B}}$

I. ✓。

設 G 為該圓的圓心。

由於 O 位於該圓以外，可得 $OG > r$，即 $a > r$。

II. ✗。

G 在第三象限，可得 $180^\circ < \theta < 270^\circ$。

III. ✓。

當 $180^\circ < \theta < 270^\circ$ 時，可得 $\tan\theta > 0$。

9. $\boxed{\text{A}}$

$x^2 + y^2 + 10x - 6y + \frac{55}{4} = 0$

I. ✓。

圓心的坐標為 $(-5,\ 3)$。

II. ✓。

半徑 $= \sqrt{5^2 + 3^2 - \frac{55}{4}} = \frac{9}{2}$

所求坐標 $= \left(-5 + \frac{9}{2},\ 3\right)$

$= \left(-\frac{1}{2},\ 3\right)$

III. ✗。

圓周 $= 2\pi\left(\frac{9}{2}\right) = 9\pi \neq 81\pi$

10. $\boxed{\text{D}}$

$x^2 + y^2 - 6x + 8y + \frac{19}{2} = 0$

I. ✓。

圓心的坐標為 $(3,\ -4)$。

II. ✗。

半徑 $= \sqrt{3^2 + 4^2 - \frac{19}{2}} = \sqrt{\frac{31}{2}} \neq 9$

III. ✓。

$(0)^2 + (0)^2 - 6(0) + 8(0) + \frac{19}{2} = \frac{19}{2} > 0$

原點位於該圓以外。

11. $\boxed{\text{D}}$

$x^2 + y^2 - 8x + 6y + \dfrac{26}{3} = 0$

I. ✓。

圓心的坐標為 $(4,\ -3)$。

II. ✓。

$$\begin{aligned} 面積 &= \pi\left(\sqrt{4^2 + 3^2 - \frac{26}{3}}\right)^2 \\ &= \frac{49\pi}{3} \\ &> 16\pi \end{aligned}$$

III. ✓。

$(0)^2 + (0)^2 - 8(0) + 6(0) + \dfrac{26}{3} = \dfrac{26}{3} > 0$

原點位於該圓以外。

12. $\boxed{\text{C}}$

圓心的坐標為 $\left(-\dfrac{k}{2},\ 6\right)$。

留意圓心與題目給定的兩點共線。

$$\frac{12 - 0}{0 - 8} = \frac{6 - 0}{-\frac{k}{2} - 8}$$

$$k = -8$$

13. $\boxed{\text{D}}$

$x^2 + y^2 + 4x - 3y - \dfrac{3}{2} = 0$

I. ✗。

A 的坐標為 $\left(-2,\ \dfrac{3}{2}\right)$。

II. ✓。

$(1)^2 + (2)^2 + 4(1) - 3(2) - \dfrac{3}{2} = \dfrac{3}{2} > 0$

B 在 C 以外。

III. ✓。

設 θ_1 及 θ_2 分別為 OA 及 OB 的傾角。

$$\tan\theta_1 = \frac{\frac{3}{2} - 0}{-2 - 0} \quad 及 \quad \tan\theta_2 = \frac{2 - 0}{1 - 0}$$

$$\theta_1 \approx 143° \qquad\qquad \theta_2 \approx 63.4°$$

$\angle AOB = \theta_1 - \theta_2 \approx 79.7° < 90°$

$\angle AOB$ 為銳角。

14. $\boxed{\text{A}}$

C_1: $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$

C_2: $x^2 + y^2 - 2x - 4y - \dfrac{41}{2} = 0$

G_1 及 G_2 的坐標分別為 $(-1,\ 2)$ 及 $(1,\ 2)$。

I. ✓。

$OG_1 = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

$OG_2 = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} = OG_1$

因此，$\triangle OG_1G_2$ 為等腰三角形。

II. ✓。

C_1 的半徑 $= \sqrt{1^2 + 2^2 + 4} = 3$

C_2 的半徑 $= \sqrt{1^2 + 2^2 + \dfrac{41}{2}} = \sqrt{\dfrac{51}{2}} > 3$

III. ✗。

$(0)^2 + (0)^2 + 2(0) - 4(0) - 4 = -4 < 0$

O 位於 C_1 以內。

$(0)^2 + (0)^2 - 2(0) - 4(0) - \dfrac{41}{2} = -\dfrac{41}{2} < 0$

O 位於 C_2 以內。

15. $\boxed{\text{C}}$

C_1: $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 20 = 0$
C_2: $x^2 + y^2 + 6x - 8y + \dfrac{33}{2} = 0$
G_1 及 G_2 的坐標分別為 $(4,\ 3)$ 及 $(-3,\ 4)$。

I. ✓。
G_1O 的斜率 $= \dfrac{3-0}{4-0} = \dfrac{3}{4}$
G_2O 的斜率 $= \dfrac{4-0}{-3-0} = -\dfrac{4}{3} = -1 \div \dfrac{3}{4}$
因此，G_1O 垂直於 G_2O。

II. ✗。
C_1 的面積 $= \pi\left(\sqrt{4^3 + 3^2 - 20}\right)^2 = 5\pi$
C_2 的面積 $= \pi\left(\sqrt{3^2 + 4^2 - \dfrac{33}{2}}\right)^2 = \dfrac{17\pi}{2} > 5\pi$

III. ✓。
$OG_1 = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$
$OG_2 = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

16. $\boxed{\text{D}}$

C: $x^2 + y^2 - 3x + y - \dfrac{13}{2} = 0$

I. ✗。
圓心的坐標為 $\left(\dfrac{3}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)$。

II. ✓。
$AB = \sqrt{(2-1)^2 + (1+2)^2} = \sqrt{10}$
半徑 $= \sqrt{\left(\dfrac{3}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{13}{2}} = 3 < \sqrt{10}$

III. ✓。
將圓心記為 G。
AB 的斜率 $= \dfrac{1+2}{2-1} = 3$
BG 的斜率 $= \dfrac{1+\frac{1}{2}}{2-\frac{3}{2}} = 3$
A、B 與 G 共線。
因此，G 在通過 A 及 B 的直線上。

17. $\boxed{\text{B}}$

圓心的坐標為 $(5,\ -4)$.
假定 L 與 y 軸相交於 $A\ (0,\ k)$。
留意通過圓心與 PQ 的中點的直線垂直於 L。

$$\frac{k+8}{0-4} \times \frac{-4+8}{5-4} = -1$$
$$k = -7$$

L 的 y 截距為 -7。

18. $\boxed{\text{D}}$

I. ✓。$G_1\ (-2,\ 6)$，$G_2\ (2,\ 4)$。OG_2 的斜率 $\times$ G_1G_2 的斜率 $= \dfrac{4}{2} \times \dfrac{6-4}{-2-2} = -1$

II. ✓。圓心的距離 $= \sqrt{(2+2)^2 + (6-4)^2} = \sqrt{20}$
C_1 的半徑 $= \sqrt{2^2 + 6^2 + 40} = \sqrt{80} = 2\sqrt{20}$；$C_2$ 的半徑 $= \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20}$
由於圓心的距離 = 半徑之差，該兩圓內切。

III. ✓。面積比 $= \left(\dfrac{\sqrt{80}}{\sqrt{20}}\right)^2 = 4$

19. $\boxed{\text{B}}$

C: $x^2 + y^2 + 10x - 6y + \dfrac{15}{2} = 0$

I. ✓。
圓心的坐標為 $(-5,\ 3)$。

II. ✗。
半徑 $= \sqrt{5^2 + 3^2 - \dfrac{15}{2}} = \sqrt{\dfrac{53}{2}} \neq 11$

III. ✓。
$(2)^2 + (0)^2 + 10(2) - 6(0) + \dfrac{15}{2} = \dfrac{63}{2} > 0$
點 $(2,\ 0)$ 位於 C 以外。

20. $\boxed{\text{C}}$

I. ✓。

C 的圓心的坐標為 $(24, 24)$。

留意 $2(24) + 3(24) - 120 = 0$，L 通過 C 的圓心。

因此，L 為 C 的對稱軸。

II. ✗。

$(35)^2 + (45)^2 - 48(35) - 48(45) + 576 = -14 < 0$

點 $(35, 45)$ 位於 C 以內。

III. ✓。

圓周 $= 2\pi\sqrt{24^2 + 24^2 - 576} = 48\pi$