

$$1. \quad (a) \quad A(\theta) = \frac{[(1 - \sin \theta) + 1](2 - \cos \theta)}{2}$$

$$= \frac{(2 - \sin \theta)(2 - \cos \theta)}{2} \quad 1A$$

$$\frac{dA(\theta)}{d\theta} = \frac{1}{2} [(-\cos \theta)(2 - \cos \theta) + (2 - \sin \theta)(\sin \theta)] \quad 1M$$

$$= \frac{1}{2} [2(\sin \theta - \cos \theta) - (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta)]$$

$$= \frac{1}{2} (\sin \theta - \cos \theta)(2 - \sin \theta - \cos \theta) \quad 1$$

(b) (i) 對 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, 可得 $\sin \theta < 1$ 及 $\cos \theta < 1$ 。 1M

$$2 - \sin \theta - \cos \theta > 2 - 1 - 1$$

$$2 - \sin \theta - \cos \theta > 0 \quad 1$$

(ii) 當 $A(\theta) = 0$ 時,

$$\sin \theta - \cos \theta = 0 \quad 1M$$

$$\tan \theta = 1$$

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

θ	$0 < \theta < \frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$
$\frac{dA(\theta)}{d\theta}$	-	+

1M

$A(\theta)$ 在 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 達至極小值。 1A

所求之值

$$= \frac{1}{2} \left(2 - \sin \frac{\pi}{4} \right) \left(2 - \cos \frac{\pi}{4} \right)$$

$$= \frac{9 - 4\sqrt{2}}{4} \quad 1A$$

(c) 設 t s 為時間。

$$\frac{dA(\theta)}{dt} = \frac{dA(\theta)}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} \quad 1M$$

當 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 及 $\frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{10}$ 時,

$$\frac{dA(\theta)}{dt} = \frac{1}{2} \left(\sin \frac{\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{3} \right) \left(2 - \sin \frac{\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{3} \right) \left(-\frac{1}{10} \right) \quad 1M$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \cdot \frac{4 - \sqrt{3} - 1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{10} \right)$$

$$= \frac{3 - 2\sqrt{3}}{40}$$

所求變率為 $\frac{3 - 2\sqrt{3}}{40} \text{ m}^2/\text{s}$ 。 1A

2. (a) $\angle POQ = \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned}\angle OQP &= \pi - \frac{\pi}{2} - \theta = \frac{\pi}{2} - \theta \\ \angle QCR &= \pi - 2\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = 2\theta && 1M \\ A &= \pi(1)^2 \times \frac{2\theta}{2\pi} - \frac{1}{2}(1)^2 \sin 2\theta && 1M+1M \\ &= \theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta && 1 \\ \text{(b) } x &= \frac{2}{\tan \theta} && 1A \\ \text{(c) 當 } x &= 2\sqrt{3} \text{ 時,} \\ 2\sqrt{3} &= \frac{2}{\tan \theta} \\ \theta &= \frac{\pi}{6} && 1A \\ \text{考慮方程 } x &= \frac{2}{\tan \theta} \text{。} \\ \tan \theta &= \frac{2}{x} \\ \sec^2 \theta \frac{d\theta}{dt} &= -\frac{2}{x^2} \frac{dx}{dt} && 1M \\ \sec^2 \theta \frac{\pi}{6} \frac{d\theta}{dt} &= -\frac{2}{(2\sqrt{3})^2} (-2) && 1A \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{1}{4} \\ \text{考慮方程 } A &= \theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \text{。} \\ \frac{dA}{dt} &= \frac{d\theta}{dt} - \cos 2\theta \frac{d\theta}{dt} && 1M \\ &= \frac{1}{4} - \cos \frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{4} && 1M \\ &= \frac{1}{8} && 1A \\ \text{所求變率為 } &\frac{1}{8} \text{ m/s}^2 \text{。}\end{aligned}$$

3. (a) 該角錐的體積 $= \frac{1}{3}(12)^2(6) = 288 \text{ cm}^3$ 。

水面下的角錐的體積

$$= 288 \left[1 - \left(\frac{6-h}{6} \right)^3 \right] \quad 1M$$

$$= \frac{4}{3} [6 - (6-h)] [6^2 + 6(6-h) + (6-h)^2]$$

$$= \frac{4h^3}{3} - 24h^2 + 144h$$

$$V = 12h^2 - \left(\frac{4h^3}{3} - 24h^2 + 144h \right) \quad 1M$$

$$= 24h^2 - \frac{4}{3}h^3 \quad 1$$

(b) $\frac{dV}{dt} = 48h \frac{dh}{dt} - 4h^2 \frac{dh}{dt} \quad 1M$

代 $\frac{dh}{dt} = 1$,

$$\frac{dV}{dt} = 48h - 4h^2 > 140$$

$$-4h^2 + 48h - 140 > 0$$

1M

$$5 < h < 7$$

1M

藉考慮容器的高， $h \leq 5$ ，因此不可能使 $\frac{dV}{dt} > 140$ 。

不同意該宣稱。

1A

(c) 代 $\frac{dV}{dt} = -(12 - h)(\ln h + 1)^2$,

$$-(12 - h)(\ln h + 1)^2 = (48h - 4h^2) \frac{dh}{dt}$$

1M

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{(\ln h + 1)^2}{4h}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dh} \left(\frac{dh}{dt} \right) &= \frac{2(\ln h + 1) \left(\frac{1}{h} \right) (h) - (\ln h + 1)^2}{-4h^2} \\ &= \frac{(\ln h + 1)(\ln h - 1)}{4h^2} \end{aligned}$$

1M

當 $\frac{d}{dh} \left(\frac{dh}{dt} \right) = 0$,

$$\ln h = \pm 1$$

$$h = e \quad \text{或} \quad \frac{1}{e}$$

h	$0 < h < \frac{1}{e}$	$\frac{1}{e} < h < e$	$e < h < 5$
$\frac{d}{dh} \left(\frac{dh}{dt} \right)$	+	-	+
$\frac{dh}{dt} \Big _{h=\frac{1}{e}} = 0$ 及 $\frac{dh}{dt} \Big _{h=e} = -\frac{1}{e}$ 及 $\frac{dh}{dt} \Big _{h=5} = -\frac{(\ln 5 + 1)^2}{20}$.			

1M

當水深由 5 cm 減小至 e cm，水深的變率由 $-\frac{(\ln 5 + 1)^2}{20}$ cm/s 減小至局部極小值 $-\frac{1}{e}$ cm/s。

1M

當水深由 e cm 減小至 $\frac{1}{e}$ cm，水深的變率由 $-\frac{1}{e}$ cm/s 增加至局部極大值 0 cm/s。

當水深由 $\frac{1}{e}$ cm 減小至 0 cm，水深的變率減小。

1A

$$4. \quad (a) \quad PQ = \sqrt{u^2 + 64} + \sqrt{(u-9)^2 + 16} \quad 1M$$

$$\frac{dPQ}{du} = \frac{u}{\sqrt{u^2 + 64}} + \frac{u-9}{\sqrt{(u-9)^2 + 16}} \quad 1M$$

$$= \frac{u\sqrt{(u-9)^2 + 16} + (u-9)\sqrt{u^2 + 64}}{\sqrt{u^2 + 64}\sqrt{(u-9)^2 + 16}}$$

$$= \frac{u^2[(u-9)^2 + 16] - (u-9)^2(u^2 + 64)}{\sqrt{u^2 + 64}\sqrt{(u-9)^2 + 16}(u\sqrt{(u-9)^2 + 16} - (u-9)\sqrt{u^2 + 64})}$$

$$= \frac{-48(u-6)(u-18)}{\sqrt{u^2 + 64}\sqrt{(u-9)^2 + 16}(u\sqrt{(u-9)^2 + 16} - (u-9)\sqrt{u^2 + 64})}$$

$$\text{對 } \frac{dPQ}{du} = 0, \text{ 可得 } u = 6. \quad 1M$$

$$\text{因此, 可得 } a = 6. \quad 1A$$

(b) (i) 設 A 平方單位為長方形 $PQSR$ 的面積。

$$A = uPQ \quad 1M$$

$$\frac{dA}{du} = PQ + u \frac{dPQ}{du} \quad 1M$$

當 $u = 6$,

$$\begin{aligned} \frac{dA}{du} &= \sqrt{6^2 + 64} + \sqrt{(6-9)^2 + 16} + 6(0) \\ &= 15 \neq 0 \end{aligned} \quad 1M$$

由此, 當 $u = 6$ 時, A 不達至其極小值。

不同意該宣稱。 1A

$$(ii) \quad OP = \sqrt{u^2 + (u^2 + 64)}$$

$$= \sqrt{2u^2 + 64}$$

$$\frac{dOP}{dt} = \frac{2u}{\sqrt{2u^2 + 64}} \frac{du}{dt} \quad 1M$$

當 $u = 6$ 時,

$$12 = \frac{2(6)}{\sqrt{2(6)^2 + 64}} \left(\frac{du}{dt} \Big|_{u=6} \right)$$

$$\frac{du}{dt} \Big|_{u=6} = 2\sqrt{34} \quad 1M$$

設 w 單位為長方形 $PQSR$ 的周界。

$$w = 2(u + PQ) \quad 1M$$

$$\frac{dw}{dt} = 2 \frac{du}{dt} + 2 \frac{dPQ}{du} \cdot \frac{du}{dt} \quad 1M$$

當 $u = 6$ 時,

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} \Big|_{u=6} &= 2(2\sqrt{34}) + 2(0)(2\sqrt{34}) \\ &= 4\sqrt{34} \end{aligned} \quad 1A$$

所求變率為每秒 $4\sqrt{34}$ 單位。

5. (a) (i) (2, 16) 為 C_1 的駐點。

$$y = ax + bx^3$$

$$\frac{dy}{dx} = a + 3bx^2$$

$$0 = a + 3b(2)^2 \quad 1M$$

(2, 16) 為 C_1 上的一點。

$$16 = 2a + b(2)^3 \quad 1M$$

求解後，可得 $a = 12$ 及 $b = -1$ 。 1A

(ii) $\frac{dy}{dx} = 12 - 3x^2$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -6x \quad 1M$$

$$\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{x=2} = -12 < 0$$

因此，(2, 16) 為 C_1 的極大點。 1A

- (iii) 當 $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ 時， $x = 0$ 。

x	$x < 0$	$x > 0$
$\frac{d^2y}{dx^2}$	+	-

1M

拐點為 (0, 0)。 1A

(b) (i) $PQ = (12r - r^3) - \ln(12r - r^3)$

$$= 12r - r^3 - \ln(12r - r^3) \quad 1A$$

- (ii) 設 A 平方單位為 $\triangle OPQ$ 的面積。

$$A = \frac{1}{2}r[12r - r^3 - \ln(12r - r^3)] \quad 1M$$

$$= \frac{1}{2}[12r^2 - r^4 - r \ln(12r - r^3)]$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} \left[24r - 4r^3 - \ln(12r - r^3) - \frac{r(12 - 3r^2)}{12r - r^3} \right] \frac{dr}{dt} \quad 1M$$

$$\left. \frac{dA}{dt} \right|_{r=2} = \frac{1}{2} \left[24(2) - 4(2)^3 - \ln(12(2) - 2^3) - \frac{2(12 - 3(2)^2)}{12(2) - 2^3} \right] (4) \quad 1M$$

$$= 32 - 2 \ln 16 \quad 1A$$

所求變率為每分鐘 $32 - 2 \ln 16$ 平方單位。

6. (a) S 的坐標為 (a, e^{a^2+a}) 。

$$y = e^{x^2+x}$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{x^2+x}(2x+1) \quad 1M$$

設 $(r, 0)$ 為 R 的坐標。

$$\frac{0 - e^{a^2+a}}{r - a} = e^{a^2+a}(2a + 1) \quad 1M$$

$$r = a - \frac{1}{2a + 1} \quad 1A$$

$$(b) \quad A = \frac{1}{2} \left[a - \left(a - \frac{1}{2a + 1} \right) \right] e^{a^2+a} \quad 1M+1M$$

$$= \frac{e^{a^2+a}}{2(2a + 1)}$$

$$\frac{dA}{da} = \frac{e^{a^2+a}(2a + 1)(2a + 1) - e^{a^2+a}(2)}{2(2a + 1)^2} \quad 1M$$

$$= e^{a^2+a} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{(2a + 1)^2} \right] \quad 1A$$

(c) 留意 $ST = e^{a^2+a}$ 。

$$\frac{d}{dt}(ST) \leq 2$$

$$e^{a^2+a}(2a + 1) \frac{da}{dt} \leq 2 \quad 1M$$

$$\frac{da}{dt} \leq \frac{2}{(2a + 1)e^{a^2+a}}$$

留意對 $a > \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} - \frac{1}{(2a + 1)^2} > 0$ 。

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{da} \cdot \frac{da}{dt} \quad 1M$$

$$= e^{a^2+a} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{(2a + 1)^2} \right] \cdot \frac{da}{dt}$$

$$\leq e^{a^2+a} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{(2a + 1)^2} \right] \cdot \frac{2}{(2a + 1)e^{a^2+a}} \quad 1M$$

$$\frac{dA}{dt} \leq \frac{1}{2a + 1} - \frac{2}{(2a + 1)^3}$$

設 $f(a) = \frac{1}{2a + 1} - \frac{2}{(2a + 1)^3}$ 。

$$f'(a) = -\frac{2}{(2a + 1)^2} + \frac{12}{(2a + 1)^4} \quad 1M$$

$$= \frac{-2(4a^2 + 4a - 5)}{(2a + 1)^4}$$

當 $f'(a) = 0$ 時, $a = \frac{-1 + \sqrt{6}}{2}$ 或 $\frac{-1 - \sqrt{6}}{2}$ (捨去)。
1M

a	$\frac{1}{2} < a < \frac{-1 + \sqrt{6}}{2}$	$a > \frac{-1 + \sqrt{6}}{2}$	
$f'(a)$	+	-	1M

$f(a)$ 的極大值為 $f\left(\frac{-1 - \sqrt{6}}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}}{9} < 0.3$ 。
1M

可得 $\frac{dA}{dt} \leq f(a) < 0.3$ 。

同意該宣稱。

1A

7. (a) (i) $T = \frac{\sqrt{3^2 + x^2}}{10} + \frac{20 - 4 - x}{24} + \frac{\sqrt{3^2 + 4^2}}{\left(\frac{600}{16-x}\right)}$

1M

$$= \frac{\sqrt{9+x^2}}{10} - \frac{x}{20} + \frac{4}{5}$$

1

(ii) $\frac{dT}{dx} = \frac{1}{10} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{9+x^2}} - \frac{1}{20}$

1M

$$= \frac{x}{10\sqrt{9+x^2}} - \frac{1}{20}$$

當 $\frac{dT}{dx} = 0$ 時，

$$\frac{x}{10\sqrt{9+x^2}} = \frac{1}{20}$$

$$(2x)^2 = (\sqrt{9+x^2})^2$$

$$x^2 = 3$$

$$x = \sqrt{3} \text{ 或 } -\sqrt{3} \text{ (捨去)}$$

x	$0 < x < \sqrt{3}$	$\sqrt{3} < x < 16$
$\frac{dT}{dx}$	-	+

1M

T 在 $x = \sqrt{3}$ 達至極小值。

$$T \text{ 的極小值} = \frac{\sqrt{9+3}}{10} - \frac{\sqrt{3}}{20} + \frac{4}{5}$$

$$= \frac{3\sqrt{3}+16}{20}$$

1A

$$SM = \sqrt{3^2 + 3}$$

$$= \sqrt{12} \text{ km}$$

1A

(b) (i) $SC = (\sqrt{12})(\sqrt{3}) = 6 \text{ km}$

1M

$$CN = \sqrt{3^2 + (16-6)^2} = \sqrt{109} \text{ km}$$

$$\sin \beta = \frac{3}{\sqrt{109}} \text{ 及 } \cos \beta = \frac{10}{\sqrt{109}} \circ \quad 1A$$

$$\frac{RN}{\sin \alpha} = \frac{CN}{\sin \angle CRN} \quad 1M$$

$$\begin{aligned} RN &= \frac{\sqrt{109} \sin \alpha}{\sin(\pi - \alpha - \beta)} \\ &= \frac{\sqrt{109} \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} \\ &= \frac{\sqrt{109} \sin \alpha}{\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha} \quad 1M \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\sqrt{109} \sin \alpha}{\sin \alpha \left(\frac{10}{\sqrt{109}} \right) + \cos \alpha \left(\frac{3}{\sqrt{109}} \right)} \\ &= \frac{109 \tan \alpha}{10 \tan \alpha + 3} \quad 1 \end{aligned}$$

$$(ii) \frac{dRN}{dt} = 109 \frac{\sec^2 \alpha (10 \tan \alpha + 3) - 10 \sec^2 \alpha \tan \alpha}{(10 \tan \alpha + 3)^2} \cdot \frac{d\alpha}{dt} \quad 1M$$

$$= \frac{327 \sec^2 \alpha}{(10 \tan \alpha + 3)^2} \cdot \frac{d\alpha}{dt}$$

$$\frac{dRN}{dt} = \frac{-24}{3600} = -\frac{1}{150} \text{ km/s}$$

$$-\frac{1}{150} = \frac{327 \sec^2 1}{(10 \tan 1 + 3)^2} \cdot \frac{d\alpha}{dt}$$

$$\frac{d\alpha}{dt} \approx -0.0021$$

所求變率為 -0.0021 rad/s 。 1A

8. (a) $y = \frac{1}{2} \ln x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2x} \quad 1M$$

C 在 P 的切線斜率 $= \frac{1}{2r}$; C 在 P 的法線斜率 $= -2r$ 。

設 Q 的坐標為 $(q, 0)$ 。

$$\frac{0 - \frac{1}{2} \ln r}{q - r} = -2r \quad 1M$$

$$\ln r = -4qr + 4r^2$$

$$q = \frac{4r^2 + \ln r}{4r} \quad 1$$

Q 的 x 坐標為 $\frac{4r^2 + \ln r}{4r}$ 。

(b) 設 $\triangle PQR$ 的面積為 A 。

$$A = \frac{1}{2} \left(\frac{4r^2 + \ln r}{4r} - r \right) \left(\frac{1}{2} \ln r \right) \quad 1\text{M}$$

$$= \frac{(\ln r)^2}{16r} \quad 1\text{A}$$

$$\frac{dA}{dr} = \frac{2}{16r} (\ln r) \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{(\ln r)^2}{16r^2} \quad 1\text{M}$$

$$= \frac{\ln r (2 - \ln r)}{16r^2}$$

$$\text{當 } \frac{dA}{dr} = 0 ,$$

$$\ln r = 2 \quad \text{或} \quad 0$$

$$r = e^2 \quad \text{或} \quad 1 \quad (\text{捨去})$$

r	$1 < r < e^2$	$r > e^2$	
$\frac{dA}{dr}$	+	-	1M

$$A \text{ 在 } r = e^2 \text{ 達至最大值。最大面積} = \frac{(\ln e^2)^2}{16e^2} = \frac{1}{4e^2} \quad 1\text{A}$$

$$(c) \quad OP = \sqrt{r^2 + (\ln \sqrt{r})^2} = \frac{1}{2} \sqrt{4r^2 + (\ln r)^2} \quad 1M$$

$$\frac{dOP}{dt} = \frac{4r^2 + \ln r}{2r\sqrt{4r^2 + (\ln r)^2}} \cdot \frac{dr}{dt} \quad 1M$$

$$\text{當 } r = e, \quad \frac{dOP}{dt} = \frac{1}{2} \left(e^2 + \frac{1}{4} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(2e + \frac{1}{2e} \right) \frac{dr}{dt} = \frac{1}{e} \left(e^2 + \frac{1}{4} \right) \frac{dr}{dt}$$

$$\text{由於 } \frac{dOP}{dt} \leq 32e^2,$$

$$\frac{1}{e} \cdot \left(e^2 + \frac{1}{4} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{dr}{dt} \leq 32e^2$$

$$\frac{dr}{dt} \leq 32e^3 \left(e^2 + \frac{1}{4} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

當 $r = e$,

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\ln r(2 - \ln r)}{16r^2} \cdot \frac{dr}{dt}$$

$$= \frac{1}{16e^2} \cdot \frac{dr}{dt}$$

$$\leq \frac{1}{16e^2} \cdot 32e^3 \left(e^2 + \frac{1}{4} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$< 2e \cdot (e^2)^{-\frac{1}{2}} = 2$$

1M

該宣稱正確。

1A

$$9. (a) \quad PQ = \sqrt{u^2 + 36} + \sqrt{(20 - u)^2 + 16}$$

1M

$$\frac{dPQ}{du} = u(u^2 + 36)^{-\frac{1}{2}} + (u - 20)[(20 - u)^2 + 16]^{-\frac{1}{2}}$$

1M

$$\text{當 } \frac{dPQ}{du} = 0 \text{ 時,}$$

$$u(u^2 + 36)^{-\frac{1}{2}} = (20 - u)[(20 - u)^2 + 16]^{-\frac{1}{2}}$$

1M

$$u^2[(20 - u)^2 + 16] = (20 - u)^2(u^2 + 36)$$

$$0 = 20u^2 - 1440u + 14400$$

$$u = 12 \quad \text{或} \quad 60 \quad (\text{捨去})$$

u	$0 < u < 12$	$12 < u < 20$
$\frac{dPQ}{du}$	-	+

1M

PQ 在 $u = 12$ 達至極小值。

因此, $a = 12$ 。

1A

(b) (i) 設 β 為長方形 $PQSR$ 的面積。

$$\beta = (PQ)u \quad 1M$$

$$\frac{d\beta}{du} = u \frac{dPQ}{du} + PQ \quad 1M$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\beta}{du} \right|_{u=12} &= (12)(0) + \sqrt{12^2 + 36} + \sqrt{(20-12)^2 + 16} \\ &= 10\sqrt{5} \neq 0 \end{aligned} \quad 1M$$

因此，當 $u = 12$ 時， β 不達至其極小值。

不同意該宣稱。

1A

(ii) 在時間 t min 後，

$$OP = \sqrt{u^2 + (u^2 + 36)}$$

$$\frac{dOP}{dt} = 2u(2u^2 + 36)^{-\frac{1}{2}} \frac{du}{dt} \quad 1M$$

$$28 = 2(12)(2(12)^2 + 36)^{-\frac{1}{2}} \left(\left. \frac{du}{dt} \right|_{u=12} \right) \quad 1M$$

$$\left. \frac{du}{dt} \right|_{u=12} = 21$$

設長方形 $PQSR$ 的周界為 p 。

$$p = 2(PQ + u) \quad 1M$$

$$\frac{dp}{dt} = 2 \frac{dPQ}{du} \frac{du}{dt} + 2 \frac{du}{dt} \quad 1M$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{dp}{dt} \right|_{u=12} &= 2(0)(21) + 2(21) \\ &= 42 \end{aligned}$$

所求變率為每分鐘 42 單位。

1A

10. (a) (i) $T = \frac{PQ}{7} + \frac{BQ}{1.4} \quad 1M$

$$= \frac{x}{7} + \frac{5\sqrt{30^2 + (40-x)^2}}{7}$$

$$= \frac{x + 5\sqrt{x^2 - 80x + 2500}}{7} \quad 1A$$

(ii) 當 T 為極小值， $\frac{dT}{dx} = 0$

$$\frac{1}{7} + \frac{5}{7} \cdot \frac{1}{2} (x^2 - 80x + 2500)^{-\frac{1}{2}} (2x - 80) = 0 \quad 1M$$

$$(\sqrt{x^2 - 80x + 2500})^2 = [-5(x - 40)]^2$$

$$2x^2 - 160x + 3125 = 0 \quad 1$$

$$x = 40 - \frac{5\sqrt{6}}{2} \quad \text{或} \quad 40 + \frac{5\sqrt{6}}{2} \quad (\text{捨去})$$

x	$0 < x < 40 - \frac{5\sqrt{6}}{2}$	$40 - \frac{5\sqrt{6}}{2} < x < 40$
$\frac{dT}{dx}$	-	+

當 T 為極小值， $x = 40 - \frac{5\sqrt{6}}{2}$ 。

1M

$$QB = \sqrt{30^2 + \left[40 - \left(40 - \frac{5\sqrt{6}}{2}\right)\right]^2} = \frac{25\sqrt{6}}{2} \text{ m}$$

1

(b) (i) $\sin \beta = \frac{30}{\left(\frac{25\sqrt{6}}{2}\right)} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$

1A

$$\cos \beta = \frac{40 - \left(40 - \frac{5\sqrt{6}}{2}\right)}{\frac{25\sqrt{6}}{2}} = \frac{1}{5}$$

1A

在 $\triangle MAB$ ，

$$\frac{MB}{\sin \alpha} = \frac{AB}{\sin(\pi - \alpha - \beta)}$$

1M

$$MB = \frac{40 \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$$

$$= \frac{40 \sin \alpha}{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}$$

1M

$$= \frac{40 \tan \alpha}{\frac{1}{5} \tan \alpha + \frac{2\sqrt{6}}{5}}$$

$$= \frac{200 \tan \alpha}{\tan \alpha + 2\sqrt{6}}$$

1

(ii) $\frac{dMB}{dt} = 200 \cdot \frac{\sec^2 \alpha (\tan \alpha + 2\sqrt{6}) - \tan \alpha \sec^2 \alpha}{(\tan \alpha + 2\sqrt{6})^2} \cdot \frac{d\alpha}{dt}$

1M

$$-1.4 = \frac{400\sqrt{6} \sec^2 0.2}{(\tan 0.2 + 2\sqrt{6})^2} \frac{d\alpha}{dt}$$

$$\frac{d\alpha}{dt} \approx -0.0357 \text{ rad/s}$$

1A