

SUM-AS-2425-ASM-SET 4-MATH

建議題解

結構式試題

1. (a) 設 $S(n) = an + bn^2$ ，其中 a 及 b 均為非零常數。 1A

$$\begin{cases} 180 = 3a + 9b \\ 180 = 12a + 144b \end{cases} \quad 1M$$

求解後，可得 $a = 75$ 及 $b = -5$ 。 1A

因此， $S(n) = 75n - 5n^2$ 。

(b) $T(n) = S(n) - S(n-1)$

$$= [75n - 5n^2] - [75(n-1) - 5(n-1)^2] \quad 1M$$

$$= 80 - 10n \quad 1A$$

(c) $T(n+1) - T(n) = [80 - 10(n+1)] - [80 - 10n] = -10 = \text{常數}$ 1M
同意該宣稱。 1

2. (a) 三邊的長度為 a 、 $a+d$ 及 $a+2d$ 。

$$a + (a+d) > a+2d \quad 1M$$

$$a > d \quad 1$$

- (b) 設 θ 為所求之角。

$$(a+d)^2 = a^2 + (a+2d)^2 - 2a(a+2d)\cos\theta \quad 1M$$

$$a^2 + 2ad + d^2 = 2a^2 + 4ad + 4d^2 - 2a(a+2d)\cos\theta$$

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{a(a+2d) + 3d^2}{2a(a+2d)} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{3d^2}{2a(a+2d)} \\ &> \frac{1}{2} \end{aligned} \quad 1M$$

由於 $\cos\theta > \frac{1}{2}$ ，可得 $\theta < 60^\circ$ 。 1

3. (a) 設 a 及 d 分別為首項及公差。

$$\begin{cases} \frac{[a + (a+3d)]4}{2} = -142 \\ \frac{[(a+15d) + (a+21d)]7}{2} = 329 \end{cases} \quad 1M$$

求解後，可得 $a = -43$ 及 $d = 5$ 。 1M

$$\begin{aligned} a_n &= -43 + (n-1)5 \\ &= 5n - 48 \end{aligned} \quad 1A$$

$$\begin{aligned}
 \text{(b)} \quad & a_5 + a_6 + \dots + a_{15} \\
 &= \frac{[(5(5) - 48) + (5(15) - 48)]11}{2} \\
 &= 22
 \end{aligned}$$

1A

(c) 考慮正數項。

$$\begin{aligned}
 5n - 48 &> 0 \\
 n &> 9.6
 \end{aligned}$$

1M

a_{10} , a_{11} , a_{12} , ... , a_{22} 為所有正數項。

所求之值

$$\begin{aligned}
 &= a_{10} + a_{11} + \dots + a_{22} \\
 &= \frac{[(5(10) - 48) + (5(22) - 48)]13}{2} \\
 &= 416
 \end{aligned}$$

1M
1A

$$\begin{aligned}
 4. \quad \text{(a)} \quad & A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_{10} = 75 \\
 & \log_2 a + \log_2 2a + \log_2 2^2 a + \dots + \log_2 2^9 a = 75 \\
 & \log_2 a + (\log_2 a + 1) + (\log_2 a + 2) + \dots + (\log_2 a + 9) = 75 \\
 & 10 \log_2 a + \frac{(1+9)9}{2} = 75 \\
 & \log_2 a = 3 \\
 & a = 2^3 \\
 & a = 8
 \end{aligned}$$

1M
1M
1A

$$\begin{aligned}
 \text{(b)} \quad & A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n > 100 \\
 & 3 + 4 + 5 + \dots + [3 + (n-1)1] > 100 \\
 & \frac{[3 + (n+2)]n}{2} > 100 \\
 & \frac{n^2}{2} + \frac{5n}{2} - 100 > 0 \\
 & n < -16.9 \quad \text{或} \quad n > 11.9 \\
 & n \text{ 的最小值為 } 12。
 \end{aligned}$$

1M
1M
1A

$$\begin{aligned}
 5. \quad \text{(a)} \quad & \text{可得 } \alpha + \beta = 4 \text{ 及 } \alpha\beta = -\frac{k}{2}。 \\
 & (\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \\
 & = 4^2 - 4\left(-\frac{k}{2}\right) \\
 & = 2k + 16
 \end{aligned}$$

1M
1M
1A

$$\begin{aligned}
 \text{(b)} \quad & 14 - k = (2k + 16) - 14 \\
 & k = 4
 \end{aligned}$$

1A

$$A(n) = 4 + (n - 1)(10)$$

$$= 10n - 6$$

$$A(1) + A(2) + A(3) + \dots + A(n) < 70\,000$$

$$\frac{[4 + (10n - 6)]n}{2} < 70\,000 \quad 1M$$

$$5n^2 - n - 70\,000 < 0$$

$$-118.2 < n < 118.4 \quad 1M$$

n 的最大值為 118。

1A

6. (a) $P(1) + P(2) + P(3) + \dots + P(n)$

$$= (-17) + (-15) + (-13) + \dots + (2n - 19)$$

$$= \frac{[(-17) + (2n - 19)]n}{2} \quad 1M$$

$$= n^2 - 18n \quad 1A$$

(b) 留意 $\log Q(n) = 6n - 57 = 3P(n)$ 。

$$\log Q(1) + \log Q(2) + \log Q(3) + \dots + \log Q(n)$$

$$= 3[P(1) + P(2) + P(3) + \dots + P(n)] \quad 1M+1M$$

$$= 3n^2 - 54n$$

$$= 3[n^2 - 2(9)(n) + (9)^2] - 243 \quad 1M$$

$$= 3(n - 9)^2 - 243$$

最小值為 -243 。

1A

7. 設 n 為最底層的罐頭數目。

$$n + (n - 1) + (n - 2) + \dots + 1 \geq 74$$

$$\frac{(n + 1)n}{2} \geq 74 \quad 1M$$

$$n^2 + n - 148 \geq 0$$

$$n \geq 11.7 \quad \text{或} \quad n \leq -12.7 \quad (\text{捨去}) \quad 1A$$

最底層共有 12 個罐頭。

留意 $(12 + 11 + 10 + \dots + 1) - 74 = 4$ 。

考慮從 12 層，其中頂層有 1 個罐頭，底層有 12 個罐頭的罐頭堆的頂部，取走 4 個罐頭。 1M

共可擺放 10 層。 1A

8. (a) $f_n(x) = \frac{-1}{n}x^2 + 2x$

$$= \frac{-1}{n}(x^2 - 2nx + n^2) + n \quad 1M$$

$$= \frac{-1}{n}(x - n)^2 + n$$

V_n 的坐標為 (n, n) 。

因此， V_n 在 $y = x$ 上。

1

(b) (i) 2 1A

(ii) A_2 及 V_2 的坐標分別為 (4, 0) 及 (2, 2)。

所求面積

$$= (\triangle OA_2V_2 \text{ 的面積}) - (\triangle OA_1V_1 \text{ 的面積})$$

$$= \frac{(4)(2)}{2} - \frac{(2)(1)}{2}$$

1M

$$= 3$$

1A

(c) $\triangle A_3V_3V_4A_4$ 的面積

$$= \frac{(8)(4)}{2} - \frac{(6)(3)}{2}$$

$$= 7$$

該數列的首項及公差分別為 3 及 4。

1M

設 p 為所需的梯形的數目。

$$\frac{p}{2} [2(3) + (p-1)4] > 500$$

1M

$$2p^2 + p - 500 > 0$$

$$p > 15.6 \quad \text{或} \quad p < -16.1 \quad (\text{捨去})$$

需要 16 個梯形以求得所求之面積和。

由於 $n = 2p - 1$, n 的最小值為 31。

1A

9. (a) 所求之數目 $= n + (n-1) = 2n - 1$

1A

(b) 第 n 行前的方格數目 $= n + (n+1) + \dots + (2n-2)$

$$= \frac{n-1}{2} [n + 2n - 2]$$

1M+1A

$$= \frac{(n-1)(3n-2)}{2}$$

$$\text{所求的整數} = n + \frac{(n-1)(3n-2)}{2} = \frac{3n^2 - 3n + 2}{2}$$

1M+1A

(c) 所求之和 $= \frac{2n-1}{2} \left[2 \times \frac{3n^2 - 3n + 2}{2} + (2n-1-1)(1) \right]$

1M+1A

$$= \frac{n(2n-1)(3n-1)}{2}$$

1A

(d) 總和 $= 3n^3 + \frac{n(1-5n)}{2}$ 。

當 $n = 7$ 時 (或其他合理數字), 總和為 910, 並非 3 的倍數。

1A

不同意該宣稱。

1