

M2SUM-DRILL-2425-ASM-SET 2-MATH

建議題解

1. (a) P 的坐標為 $\left(u, \frac{e^{2u}}{2}\right)$ 。

$$y = \frac{e^{2x}}{2}$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{2x}$$

1M

設 R 的坐標為 $(r, 0)$ 。

$$\frac{0 - \frac{e^{2u}}{2}}{r - u} = e^{2u}$$

1M

$$r = u - \frac{1}{2}$$

1A

R 的坐標為 $\left(u - \frac{1}{2}, 0\right)$ 。

- (b) Q 的坐標為 $\left(u, \cos\left(2u + \frac{\pi}{3}\right)\right)$ 。

$$\cos\left(2u + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$2u + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

$$u = \frac{\pi}{6}$$

1A

設 A 平方單位為 $\triangle PQR$ 在時間 t s 的面積。

$$A = \frac{1}{2} \left[\frac{e^{2u}}{2} - \cos\left(2u + \frac{\pi}{3}\right) \right] \left[u - \left(u - \frac{1}{2}\right) \right]$$

1M

$$= \frac{1}{8} \left[e^{2u} - 2 \cos\left(2u + \frac{\pi}{3}\right) \right]$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{8} \left[2e^{2u} + 4 \sin\left(2u + \frac{\pi}{3}\right) \right] \frac{du}{dt}$$

1M

$$0.5 = \frac{1}{8} \left[2e^{\frac{\pi}{3}} + 4 \sin \frac{2\pi}{3} \right] \frac{du}{dt}$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{2}{e^{\frac{\pi}{3}} + \sqrt{3}}$$

1A

所求變率為每秒 $\frac{2}{e^{\frac{\pi}{3}} + \sqrt{3}}$ 單位。

2. (a) $AD = 2 \cos \theta + 2 + 2 \cos \theta$ 1M

$$= (4 \cos \theta + 2) \text{ m}$$

$$V = \left[\frac{1}{2} (AD + BC)(BX) \right] (5)$$

$$= \frac{1}{2} (4 \cos \theta + 2 + 2)(2 \sin \theta)(5)$$
 1M

$$= 20(\sin \theta \cos \theta + \sin \theta) \text{ m}^3$$
 1

(b) $\frac{dV}{d\theta} = 20[\sin \theta(-\sin \theta) + (\cos \theta) \cos \theta + \cos \theta]$ 1M

$$= 20(-(1 - \cos^2 \theta) + \cos^2 \theta + \cos \theta)$$

$$= 20(2 \cos^2 \theta + \cos \theta - 1)$$

$$= 20(2 \cos \theta - 1)(\cos \theta + 1)$$

當 $\frac{dV}{d\theta} = 0$ 時， 1M

$$\cos \theta = \frac{1}{2} \quad \text{或} \quad -1 \quad (\text{捨去})$$

$$\theta = \frac{\pi}{3}$$

θ	$0 < \theta < \frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{2}$
$\frac{dV}{d\theta}$	+	-

1M

V 在 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 時最大。

所求 θ 的值為 $\frac{\pi}{3}$ 。 1A

(c) (i) 設 $h \text{ m}$ 及 $Y \text{ m}^3$ 分別為水的深度及水的體積。

考慮平面 $ABCD$ 內水的橫切面。

水平面的長度

$$= \frac{h}{\tan \frac{\pi}{3}} + 2 + \frac{h}{\tan \frac{\pi}{3}}$$
 1M

$$= \left(\frac{2h}{\sqrt{3}} + 2 \right) \text{ m}$$

考慮水的體積。

$$W = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{2h}{\sqrt{3}} + 2 + 2 \right) (h) \right] (5)$$
 1M

$$= \frac{5h^2}{\sqrt{3}} + 10h$$

$$\frac{dW}{dt} = \left(\frac{10h}{\sqrt{3}} + 10 \right) \frac{dh}{dt}$$
 1M

$$5 = \left[\frac{10}{\sqrt{3}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + 10 \right] \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{3}$$
 1A

所求變率為 $\frac{1}{3} \text{ m/h}$ 。

(ii) 水平面的面積

$$= \left(\frac{2h}{\sqrt{3}} + 2 \right) \times 5$$

1M

$$= \left(\frac{10h}{\sqrt{3}} + 10 \right) \text{m}^2$$

留意 $\frac{dh}{dt}$ 為常數。

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= \left(\frac{10h}{\sqrt{3}} + 10 \right) \frac{dh}{dt} \\ &= (\text{水平面的面積}) \frac{dh}{dt} \end{aligned}$$

同意該宣稱。

1A

3. (a) P 的坐標為 $(r, \ln(2r+1))$ 。

$$y = \ln(2x+1)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{2x+1}$$

1M

設 $(q, 0)$ 為 Q 的坐標。

$$\frac{0 - \ln(2r+1)}{q - r} = -1 \div \frac{2}{2r+1}$$

1M

$$\frac{2\ln(2r+1)}{2r+1} = q - r$$

$$q = \frac{2\ln(2r+1)}{2r+1} + r$$

1

- (b) 設 A 為 $\triangle PQR$ 的面積。

$$A = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{2\ln(2r+1)}{2r+1} + r \right) - r \right] \ln(2r+1)$$

1M

$$= \frac{[\ln(2r+1)]^2}{2r+1}$$

1A

$$\frac{dA}{dr} = \frac{(2r+1)(2) \left[\frac{2\ln(2r+1)}{2r+1} \right] - [\ln(2r+1)]^2 (2)}{(2r+1)^2}$$

1M

$$= \frac{2\ln(2r+1)[2 - \ln(2r+1)]}{(2r+1)^2}$$

當 $\frac{dA}{dr} = 0$ 時，

$$\ln(2r+1) = 0 \quad \text{或} \quad 2$$

$$r = 0 \quad (\text{捨去}) \quad \text{或} \quad \frac{e^2 - 1}{2}$$

r	$0 < r < \frac{e^2 - 1}{2}$	$r > \frac{e^2 - 1}{2}$
$\frac{dA}{dr}$	+	-

1M

當 $r = \frac{e^2 - 1}{2}$ 時， A 為極大值。

所求面積

$$= \frac{\left[\ln \left(2 \left(\frac{e^2 - 1}{2} \right) + 1 \right) \right]^2}{2 \left(\frac{e^2 - 1}{2} \right) + 1}$$

$$= \frac{4}{e^2}$$

1A

- (c) $OP = \sqrt{r^2 + [\ln(2r+1)]^2}$

1M

$$\frac{dOP}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{r^2 + [\ln(2r+1)]^2}} \left[2r + \frac{4\ln(2r+1)}{2r+1} \right] \frac{dr}{dt}$$

1M

當 $r = \frac{e-1}{2}$ 時，

$$\begin{aligned}\frac{dOP}{dt} &= \frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{e-1}{2}\right)^2 + (\ln e)^2}} \left[(e-1) + \frac{4\ln e}{e} \right] \frac{dr}{dt} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(e-1)^2 + 4}} \left(\frac{e^2 - e + 4}{e} \right) \frac{dr}{dt}\end{aligned}$$

考慮當 $y = \frac{e-1}{2}$ 時， $\triangle PQR$ 的面積的變率。

$$\begin{aligned}\frac{dA}{dt} &= \frac{dA}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} \\ &= \frac{2\ln e [2 - \ln e]}{e^2} \cdot \frac{e\sqrt{(e-1)^2 + 4}}{e^2 - e + 4} \cdot \frac{dOP}{dt} \\ &= \frac{2\sqrt{(e-1)^2 + 4}}{e(e^2 - e + 4)} \cdot \frac{dOP}{dt}\end{aligned}$$

1M

留意 $0 \leq \frac{dOP}{dt} \leq \frac{e^2 - e + 4}{e}$ 。

$$0 \leq \frac{dA}{dt} \leq \frac{2\sqrt{(e-1)^2 + 4}}{e(e^2 - e + 4)} \cdot \frac{e^2 - e + 4}{e}$$

$$0 \leq \frac{dA}{dt} \leq \frac{2\sqrt{(e-1)^2 + 4}}{e^2}$$

$$0 \leq \frac{dA}{dt} < \frac{6}{e^2}$$

該宣稱正確。

1A

4. (a) A 及 B 的坐標分別為 $(h, (h-18)^2 + 100)$ 及 $(h, -h^4 + 12)$ 。

$$\begin{aligned} AB &= (h-18)^2 + 100 - (-h^4 + 12) \\ &= h^4 + h^2 - 36h + 412 \end{aligned} \quad 1M$$

$$\begin{aligned} \frac{dAB}{dh} &= 4h^3 + 2h - 36 \\ &= (h-2)(2h^2 + 4h + 9) \end{aligned} \quad 1M$$

當 AB 達至其極小值時， $\frac{dAB}{dh} = 0$ 。

$$\begin{aligned} (h-2)(2h^2 + 4h + 9) &= 0 \\ h &= 2 \quad \text{或} \quad 2h^2 + 4h + 9 = 0 \end{aligned} \quad 1M$$

考慮方程 $2h^2 + 4h + 9 = 0$ ， $\Delta = 4^2 - 4(2)(9) = -56 < 0$ 。

該方程沒有實根。

因此，可得 $a = 2$ 。 1A

- (b) (i) 設 p 單位為長方形 $ABDC$ 的周界。

$$p = 2(AB + h) \quad 1M$$

$$\frac{dp}{dh} = 2 \frac{dAB}{dh} + 2 \quad 1M$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{dp}{dh} \right|_{h=2} &= 2(0) + 2 \\ &= 2 \neq 0 \end{aligned} \quad 1M$$

當 $h = 2$ 時， p 不達至其極小值。

不同意該宣稱。 1A

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad OB &= \sqrt{h^2 + (-h^4 + 12)^2} \\ \frac{dOB}{dh} &= \frac{2h + 2(-h^4 + 12)(-4h^3)}{2\sqrt{h^2 + (-h^4 + 12)^2}} \end{aligned} \quad 1M$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{dOB}{dh} \right|_{h=2} &= \frac{4 + 2(-16 + 12)(-32)}{2\sqrt{4 + (-16 + 12)^2}} \\ &= \frac{65}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dOB}{dt} &= \frac{dOB}{dh} \cdot \frac{dh}{dt} \\ -12 &= \left(\frac{65}{\sqrt{5}} \right) \frac{dh}{dt} \Big|_{h=2} \end{aligned}$$

$$\left. \frac{dh}{dt} \right|_{h=2} = -\frac{12\sqrt{5}}{65} \quad 1M$$

設 S 平方單位為長方形 $ABDC$ 的面積。

$$S = (AB)h \quad 1M$$

$$\frac{dS}{dt} = h \frac{dAB}{dt} + AB \frac{dh}{dt} \quad 1M$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{dS}{dt} \right|_{h=2} &= 2(0) + [2^4 + 2^2 - 36(2) + 412] \left(-\frac{12\sqrt{5}}{65} \right) \\ &= -\frac{864\sqrt{5}}{13} \quad 1A \end{aligned}$$

所求變率為每秒 $-\frac{864\sqrt{5}}{13}$ 平方單位。