



7. Suggested solutions 建議題解

7.1 Conventional questions 結構式試題

1. ...

1M+1A 首 n 個圖案的點子數目 $= \frac{m}{2}[3+3+2(m-1)]$
 $= m^2 + 2m$

1M $m^2 + 2m > 6888$
 $m^2 + 2m - 6888 > 0$
 $m < -84$ (捨去) 或 $m > 82$

1A m 的最小值為 83。

2. ...

(a) 設公差為 d 。

1M $666 + d(38 - 1) = 555$
 $37d = -111$
 $d = -3$

1A 該數列的公差為 -3 。

1M+1A (b) $\frac{[666 + 666 - 3(n - 1)]n}{2} > 0$
 $-\frac{3n^2}{2} + \frac{1335n}{2} > 0$
 $\frac{3n}{2}(-n + 445) > 0$
 $0 < n < 445$

1A n 的最大值為 444。

3. ...

(a) $\alpha + \beta = -c$ 及 $\alpha\beta = -9$

1A

$$\begin{aligned}\alpha^2 + \beta^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \\ &= c^2 + 18\end{aligned}$$

1M

1A

(b) 公差 $= (\alpha^2 + \beta^2) - c^2 = 18$

1M

首項 $= 85 - 2(18) = 49$

$$49 + 67 + 85 + \dots + [49 + 18(n-1)] > 2 \times 10^6$$

$$\frac{n}{2}[49 + (18n + 31)] > 2 \times 10^6$$

1M

$$9n^2 + 40n - 2 \times 10^6 > 0$$

$$n < -473.6 \text{ (捨去)} \quad \text{或} \quad n > 469.2$$

1M

n 的最小值為 470。

1A

4. ...

(a) $A(1) = 4 - 5 = -1$ 及 $A(2) = 3$ 。

$$A(1) + A(2) + A(3) + \dots + A(n) = \frac{[-1 + (4n - 5)]n}{2}$$

1M

$$= 2n^2 - 3n$$

1A

(b) $\log(B(1)B(2)B(3)\dots B(n)) \leq 8000$

$$\log B(1) + \log B(2) + \log B(3) + \dots + \log B(n) \leq 8000$$

$$A(1) + A(2) + A(3) + \dots + A(n) \leq 8000$$

1M

$$2n^2 - 3n \leq 8000$$

$$2n^2 - 3n - 8000 \leq 0$$

$$-62.5 \leq n \leq 64$$

1A

n 的最大值為 64。

1A

5. ...

1M (a) $5\alpha - 18 = \alpha^2 - 13\alpha + 63$

$$0 = \alpha^2 - 18\alpha + 81$$

$$\alpha = 9$$

1A 當 $\alpha = 9$ 時, $\beta = 5(9) - 18 = 27$ 。

因此, $\alpha = 9$ 及 $\beta = 27$ 。

1M (b) $T(1) = \log 9 = 2\log 3$ 及 $T(2) = \log 27 = 3\log 3$ 。

1A
$$\frac{n}{2}[2\log 9 + (n-1)(\log 27 - \log 9)] > 888$$

$$\frac{n}{2}(4\log 3 + (n-1)\log 3) > 888$$

$$(\log 3)n^2 + (3\log 3)n - 1776 > 0$$

1M
$$n < -62.5 \text{ (捨去)} \quad \text{或} \quad n > 59.5$$

1A n 的最小值為 60。

6. ...

(a) 公差 = $\frac{61-26}{12-5}$

1A
$$= 5$$

1A
$$A(1) = 26 - 4(5) = 6$$

(b) $\log_8(G(1)G(2)G(3)\dots G(k)) < 999$

1M
$$\frac{\log_2 G(1) + \log_2 G(2) + \dots + \log_2 G(k)}{\log_2 8} < 999$$

1M
$$A(1) + A(2) + \dots + A(k) < 2997$$

1M
$$\frac{k}{2}[2(6) + (k-1)(5)] < 2997$$

$$\frac{5k^2}{2} + \frac{7k}{2} - 2997 < 0$$

1A
$$-35.3 < k < 33.9$$

1A k 的最大值為 33。

7. ...

1A (a) 首 4 項為 4、1、-2 及 -5。

1M+1A (b) 所求之和 = $\frac{[4+4+(-3)(100-1)]100}{2}$

1A
$$= -14450$$

8. ...

(a) 公差 = 3

$$\text{第 10 項} = 2 + 3(10 - 1)$$

$$= 29$$

1M

1A

$$(b) \text{ 所求之和} = \frac{[2 + 2 + 3(10 - 1)]10}{2}$$

1M

$$= 155$$

1A

9. ...

公差 = 3

1A

$$\frac{[5 + 5 + 3(n - 1)]n}{2} = 3925$$

1M

$$3n^2 + 7n - 7850 = 0$$

1M

$$n = 50 \quad \text{或} \quad -\frac{157}{3} \text{ (捨去)}$$

1A

因此， $n = 50$ 。

10. ...

(a) 所求的數目 = $20 + 2(50 - 1)$

1M

$$= 118$$

1A

$$(b) \text{ 首 } n \text{ 行的座位數目} = \frac{[20 + 20 + 2(n - 1)]n}{2}$$

1A

$$= n^2 + 19n$$

1A

$$n^2 + 19n = 2000$$

1M

$$n^2 + 19n - 2000 = 0$$

$$n \approx 36.2 \quad \text{或} \quad -55.2 \text{ (捨去)}$$

1A

因此，它在第 37 行。

1A

11. ...

1A (a) (i) F_{40} 的周界 $= 10 + (40 - 1)(1)$

1A $= 49 \text{ cm}$

1M (ii) 該 40 個圖形的周界之和 $= \frac{40}{2}(10 + 49)$

1A $= 1180 \text{ cm}$

1M (b) (i) F_2 的面積 $= 4 \times \left(\frac{11}{10}\right)^2$

1A $= 4.84 \text{ cm}^2$

(ii) F_3 的面積 $= 4 \times \left(\frac{12}{10}\right)^2 = 5.76 \text{ cm}^2$ 。

F_2 的面積 $- F_1$ 的面積 $= 4.84 - 4 = 0.84 \text{ cm}^2$

F_3 的面積 $- F_2$ 的面積 $= 5.76 - 4.84 = 0.92 \text{ cm}^2$

1M $\neq F_2$ 的面積 $- F_1$ 的面積

1A 因此，圖形 $F_1, F_2, F_3, \dots, F_{40}$ 的面積不能組成等差數列。

12. ...

(a) (i) 的士收費 = $\$ \left[30 + \frac{x-2}{0.2}(2.4) \right]$

$$= \$(6 + 12x)$$

1

(ii) 當 x 不是 0.2 的倍數時，比如當 $x = 2.1$ 時，

$$\text{的士收費} = \$(30 + 2.4)$$

$$= \$32.4$$

$$\neq \$(6 + 12(2.1))$$

因此，的士收費不是 $\$(6 + 12x)$ 。

1A

(b) 的士收費 = $\$[6 + 12(3.2)]$

1M+1A

$$= \$44.4$$

1A

(c) 第 2 程的的士收費 = $\$[6 + 12(3.6)]$

$$= \$49.2$$

1A

$$\text{第 99 程之行駛距離} = [3.1 + (99 - 1)0.5] \text{ km}$$

$$= 52.1 \text{ km}$$

$$\text{第 99 程的的士收費} = \$(6 + 12(52.2))$$

$$= \$632.4$$

總的士收費

$$= \$(44.4 + 49.2 + 56.4 + 61.2 + \dots + 625.2 + 632.4)$$

$$= \$(44.4 + 56.4 + \dots + 632.4) + \$(49.2 + 61.2 + \dots + 625.2)$$

1M

$$= \$ \frac{(44.4 + 632.4)50}{2} + \$ \frac{(49.2 + 625.2)49}{2}$$

1M+2A

$$= \$16920 + \$16522.8$$

$$= \$33442.8$$

$$> \$33000$$

該宣稱不正確。

1A

13. ...

1M+1A

(a) 第 4 個表格：

4	5	6	7
5	6	7	8
6	7	8	9
7	8	9	10

第 4 個表格

(b) 所求之和 = $99 + 100 + 101 + \dots + [99 + (99 - 1)]$

1M

$$= \frac{(99 + 197)99}{2}$$

1A

$$= 14652$$

(c) 所求之和

$$= 14652 + (14652 + 99) + (14652 + 2 \cdot 99) + \dots + (14652 + (99 - 1)99)$$

1M+1A

$$= \frac{(14652 + 24354)99}{2}$$

1A

$$= 1930797$$

1A

(d) 首列的整數之和 = $\frac{[k + k + (k - 1)]k}{2}$

$$= \frac{3k^2}{2} - \frac{k}{2}$$

1M

$$\text{第 } k \text{ 個表格的整數之和} = \frac{k}{2} \left[2 \left(\frac{3k^2}{2} - \frac{k}{2} \right) + (k - 1)k \right]$$

$$= \frac{k}{2} (4k^2 - 2k)$$

1A

$$= k^2(2k - 1)$$

當 k 為奇數時， $k^2(2k - 1)$ 為奇數之積，因此亦為奇數。

1A

因此，不存在奇數 k 符合所需條件。

7.2 Multiple choice questions 多項選擇題

1. ...

☐ B (74.2%)

數字由 $+1, +2, +3, \dots$ 所組成。

對應的數列為 $1, 2, 4, 7, 11, 16, 22, 29$ 。

第 8 項為 29。

2. ...

☐ D (49.5%)

$$a_4 = a_3 + a_2 \Rightarrow a_3 = a_4 - a_2 = 63 - 7 = 56$$

$$a_5 = a_4 + a_3 = 63 + 56 = 119$$

3. ...

☐ B (92.2%)

對應的數列為 $5, 9, 13, 17, 21, 25$ 。

第 6 個圖案有 25 粒點子。

4. ...

☐ C (91.6%)

對應的數列為 $9, 14, 19, 24, 29, 34, 39$ 。

第 7 個圖案有 39 粒點子。

5. ...

☐ B (85.8%)

每個圖案的點子數目由 $+4, +6, +8, \dots$ 所組成。

對應的數列為 $1, 5, 11, 19, 29, 41, 55$ 。

第 7 個圖案有 55 粒點子。

6. ...

☐ A (61.9%)

設 $a_4 = t$ 。則 $a_5 = a_3 + a_4 = 21 + t$ 及

$$a_6 = 89 = (21 + t) + t$$

$$t = 34$$

因此， $a_2 = a_4 - a_3 = 34 - 21 = 13$ 及 $a_1 = a_3 - a_2 = 21 - 13 = 8$ 。

7. ...

☐ C (91.4%)

連續兩個圖案的點子數目之差 = 4。

所求的數目 = $6 + (9 - 1)4 = 38$ 。

8. ...

☐ D (82.8%)

對應的數列由 +3, +5, +7, +9, ... 組成。

該數列為 3, 6, 11, 18, 27, 38, 51, ...。

第 7 個圖案有 51 粒點子。

9. ...

☐ C (82.9%)

每個圖案的點子數目可透過以下方式獲得：+5, +7, +9, ...

因此其對應數列為 3, 8, 15, 24, 35, 48, 63, 80。

第 8 個圖案包含 80 粒點子。

10. ...

☐ C (86.4%)

每個圖案的點子數目可透過以下方式獲得：+8, +10, +12, ...

因此其對應數列為 8, 16, 26, 38, 52, 68, 86。

第 7 個圖案包含 86 粒點子。

11. ...

☐ B (61.7%)

代 $n = 6$ 至 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ 。

$$a_8 = a_7 + a_6$$

$$60 = a_7 + 23$$

$$a_7 = 37$$

對任意正整數 n ， $a_n = a_{n+2} - a_{n+1}$ 。

n	$a_n = a_{n+2} - a_{n+1}$	結果
5	$a_5 = a_7 - a_6$	$a_5 = 37 - 23 = 14$
4	$a_4 = a_6 - a_5$	$a_4 = 23 - 14 = 9$
3	$a_3 = a_5 - a_4$	$a_3 = 14 - 9 = 5$

12. ...

☐ D (52%)

A. ✗。當 $n = 2$ 時， $(-1)^n \frac{n-1}{n+1} = \frac{1}{3} \neq \frac{-1}{4}$ 。

B. ✗。當 $n = 2$ 時， $(-1)^n \frac{n-1}{n+2} = \frac{1}{4} \neq \frac{-1}{4}$ 。

C. ✗。當 $n = 1$ 時， $(-1)^{n+1} \frac{n}{n+3} = \frac{1}{4} \neq 0$ 。

D. ✓。

13. ...

☐ C (79%)

數字由 $+5, +7, +9, \dots$ 組成。

對應的數列為 $3, 8, 15, 24, 35, 48$ 。

第 6 個圖案包含 48 粒點子。

14. ...

☐ A (89%)

對應的數列為 $4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36$ 。

第 9 個圖案有 36 粒點子。

15. ...

☐ C (77%)

數字由 $+7, +9, +11, +13, \dots$ 組成。

對應的數列為 $10, 17, 26, 37, 50, 65, 82$ 。

第 7 個圖案有 82 粒點子。

16. ...

☐ B (84%)

對應的數列為 $4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25$ 。

第 8 個圖案有 25 粒點子。

17. ...

☐ C (52%)

每項均為前 3 項之和。

該數列為 $1, 2, 3, 6, 11, 20, 37, 68, 125$ 。

第 9 項為 125。

18. ...

☐ C (66.1%)

I. $\times$ $\circ \pi^{45} - \pi^{30} = \pi^{30}(\pi^{15} - 1)$ 及 $\pi^{60} - \pi^{45} = \pi^{45}(\pi^{15} - 1) \neq \pi^{45} - \pi^{30}$

II. $\checkmark$ $\circ 45\pi - 30\pi = 15\pi = 60\pi - 45\pi$

III. $\checkmark$ $\circ (\pi - 45) - (\pi - 30) = -15 = (\pi - 60) - (\pi - 45)$

19. ...

☐ D (32.9%)

I. $\checkmark$ $\circ$ 公差 $= 4 \log a$ $\circ$

II. $\checkmark$ $\circ$ 公差 $= 1 - a$ $\circ$

III. $\checkmark$ $\circ$ 數列可化簡為 $\sin a^\circ, 0, -\sin a^\circ$ $\circ$
公差 $= -\sin a^\circ$ $\circ$

20. ...

☐ D

$$\text{公差} = \frac{23-3}{5-1} = 5$$

$$a+b+c = 8+13+18 = 39$$

21. ...

☐ A

設首項及公差分別為 a 及 d $\circ$

$$\begin{cases} a + (a+d) = 3 \\ a + (a+d) + (a+2d) = 2 \end{cases}$$

求解後，可得 $a = \frac{7}{3}$ 及 $d = -\frac{5}{3}$ $\circ$

22. ...

☐ C

$$\text{公差} = \frac{29-2}{10-1} = 3$$

$$\text{第 20 項} = 2 + (20-1)(3) = 59$$

23. ...

☐ D

$$\text{第 } n \text{ 項} = 4 + (n-1)(-2) = 6 - 2n$$

24. ...

☐ B

第 1 個等差數列的公差 $= x_2 - x_1$ 。

$$\Rightarrow b - a = 3(x_2 - x_1) \Rightarrow x_2 - x_1 = \frac{b - a}{3}$$

第 2 個等差數列的公差 $= y_3 - y_2$ 。

$$\Rightarrow b - a = 4(y_3 - y_2) \Rightarrow y_3 - y_2 = \frac{b - a}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{x_2 - x_1}{y_3 - y_2} = \left(\frac{b - a}{3} \right) \div \left(\frac{b - a}{4} \right) = \frac{4}{3}。$$

25. ...

☐ D

可得 $d = a_2 - a_1$ 。

$$\text{所求的公差} = (2a_2 + 3) - (2a_1 + 3) = 2(a_2 - a_1) = 2d。$$

26. ...

☐ D (60%)

$$\text{通項 } T(n) = 2006 + (n - 1)(-8) = -8n + 2014$$

$$-8n + 2014 < 0$$

$$n < 251.75$$

$$\text{首個負值項} = T(252) = -2$$

27. ...

☐ B

I. ✓。 $b - a = d - c$ = 公差。

II. ✓。公差為原來的等差數列的負 1 倍。

III. ✗。代 $a = 5$ 、 $b = 4$ 、 $c = 3$ 、 $d = 2$ 。 a, b, c, d 為等差數列的連續項但 $a > b > c > d$ 。

28. ...

☐ B (59%)

I. ✓。公差 $= a - 3$ 。

II. ✗。代 $b = 1$ 。數列為 7, 62, 509, 4092，顯然不是等差數列。

III. ✓。公差 $= 5 \log c$ 。

29. ...

B (39.6%)

設 a 及 d 分別為該數列的首項及公差。

$$\begin{cases} a + 10d = 83 \\ (a + 24d) + (a + 29d) = 463 \end{cases}$$

求解後，可得 $a = -7$ 及 $d = 9$ 。

$$T(1) + T(2) + T(3) + \dots + T(k) > 4 \times 10^5$$

$$\frac{[-7 + (-7 + (k-1)9)]k}{2} > 4 \times 10^5$$

$$\frac{9k^2}{2} - \frac{23k}{2} - 4 \times 10^5 > 0$$

$$k > 299.4 \quad \text{或} \quad k < -296.9 \quad (\text{捨去})$$

k 的最小值為 300。

30. ...

A (42.9%)

$$\text{公差} = \frac{61 - 26}{23 - 18} = 7; \text{首項} = 26 - (18 - 1)(7) = -93。$$

$$\text{I. } \checkmark \circ a_{14} = -93 + (14 - 1)(7) = -2 < 0$$

$$\text{II. } \checkmark \circ a_1 - a_2 = -(\text{公差}) = -7$$

$$\text{III. } \times \circ a_{27} = 89。 \text{所求之和} = \frac{(a_1 + a_{27})(27)}{2} = -54 < 0$$

31. ...

C (46.6%)

$$\text{I. } \checkmark \circ \text{解 } 2n - 19 = 25, \text{ 可得 } n = 22。 \text{ 因此, } 25 \text{ 為第 } 22 \text{ 項。}$$

$$\text{II. } \times \circ 2n - 19 < 0$$

$$n < 9.5$$

共有 9 個負值項。

$$\text{III. } \checkmark \circ \text{首項} = 2 - 19 = -17。$$

$$\text{首 } n \text{ 項之和} = \frac{[(-17) + (2n - 19)]n}{2} = n^2 - 18n。$$

32. ...

☐ B (40.2%)

第 n 項 = 首 n 項之和 - 首 $(n-1)$ 項之和 = $[6n^2 - n] - [6(n-1)^2 - (n-1)] = 12n - 7$ 。

I. ✗。 $12n - 7 = 22 \Rightarrow n = \frac{29}{12}$ (捨去)

II. ✓。 首項 = $12(1) - 7 = 5$

III. ✗。 它是等差數列。

33. ...

☐ A

第 7 項 = $[7^2 + 3(7)] - [6^2 + 3(6)]$
 $= 16$

34. ...

☐ A (23%)

第 10 項 = $10^2 - 9^2 = 19$

35. ...

☐ B (44%)

第 5 項 = $[5^2 + 2(5)] - [4^2 + 2(4)] = 11$

36. ...

☐ C

首項 = $3 + 2 = 5$ ，第 50 項 = $3 + 2(50) = 103$
首 50 項之和 = $\frac{(5+103)(50)}{2} = 2700$

37. ...

☐ D

首項 = $2 + 5 = 7$ ；第 100 項 = $2 + 5(100) = 502$
首 100 項之和 = $\frac{(7+502)(100)}{2} = 25450$

38. ...

☐ B (62%)

公差 = 3。 $a_{21} = 10 + 3(20) = 70$ 及 $a_{30} = 10 + 3(29) = 97$ 。
 $a_{21} + a_{22} + \dots + a_{30} = \frac{(70+97)(10)}{2} = 835$

39. ...

☐ C (51%)

設首項及公差分別為 a 及 d 。

$$\begin{cases} a+2d=42 \\ a+11d=6 \end{cases}$$

求解後，可得 $a=50$ 及 $d=-4$ 。

$$\text{首 } n \text{ 項之和} = \frac{[2(50) + (n-1)(-4)]n}{2} = 52n - 2n^2$$

40. ...

☐ C (73%)

設首項為 a 。

$$\frac{(a+29)(10)}{2} = 155$$

$$a = 2$$

$$\text{公差} = \frac{29-2}{10-1} = 3。$$

$$\text{第 2 項} = 2+3 = 5。$$

41. ...

☐ C (56%)

$$\text{公差} = a_2 - a_1 = 6。$$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{28} = 1624$$

$$\frac{(a_1 + a_{28})(28)}{2} = 1624$$

$$a_1 = -23$$

42. ...

☐ C

$$10 \times 10^2 \times 10^3 \times \dots \times 10^n > 10^{55}$$

$$10^{1+2+\dots+n} > 10^{55}$$

$$\frac{n(n+1)}{2} > 55$$

$$\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} - 55 > 0$$

$$n < -11 \text{ (捨去)} \text{ 或 } x > 10$$

n 的最小值為 11。