1. (a) 垂直漸近線為 $x = 3$。 1A

$$f(x) = \frac{2(x-1)^3}{(x-3)^2}$$

$$= 2x + 6 + \frac{24}{x-3} + \frac{16}{(x-3)^2}$$ 1M

斜漸近線為 $y = 2x + 6$。 1A

(b) $$f'(x) = 2 - \frac{24}{(x-3)^2} - \frac{32}{(x-3)^3}$$ 1M

$$= \frac{2(x-1)^2(x-7)}{(x-3)^3}$$

當 $f'(x) = 0$ 時，$x = 1$ 或 7。 1M

x	$x < 1$	$1 < x < 3$	$3 < x < 7$	$x > 7$
$f'(x)$	+	+	−	+

1M

極小點為 $(7,\ 27)$。 1A

沒有極大點。

(c) $$f''(x) = \frac{48}{(x-3)^3} + \frac{94}{(x-3)^4}$$

$$= \frac{48(x-1)}{(x-3)^4}$$

當 $f''(x) = 0$ 時，$x = 1$。

x	$x < 1$	$1 < x < 3$	$x > 3$
$f''(x)$	−	+	+

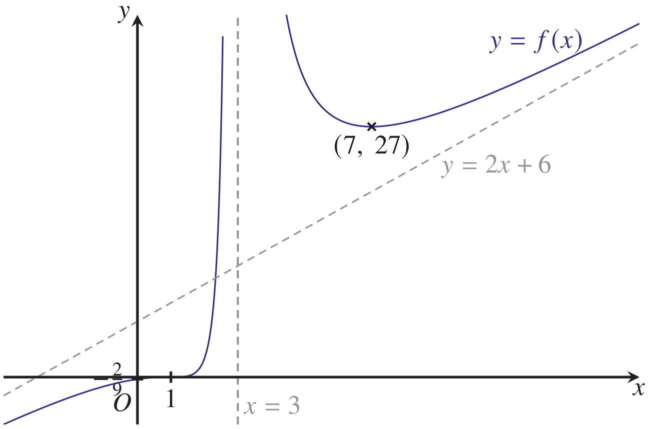
1M

拐點為 $(1,\ 0)$。 1A

(d)（漸近線） 1A

（形狀） 1A

（全部正確） 1A



2. (a) $f'(x) = \dfrac{(2x+k)(x-1)-(x^2+kx-2)(1)}{(x-1)^2}$

$= \dfrac{x^2-2x+3-k}{(x-1)^2}$ 1A

$f'(-1) = 0$

$(-1)^2 - 2(-1) + 2 - k = 0$

$k = 5$ 1A

可得 $f'(x) = \dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2} = \dfrac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2}$。

當 $f'(x) = 0$ 時，$x = -1$ 或 3。

因此，$h = 3$。 1A

(b) 極大點為 $(-1,\ 3)$。 1A

極小點為 $(3,\ 11)$。 1A

沒有拐點。 1A

(c) 垂直漸近線為 $x = 1$。 1A

$f(x) = \dfrac{x^2+5x-2}{x-1}$

$= x + 6 + \dfrac{4}{x-1}$

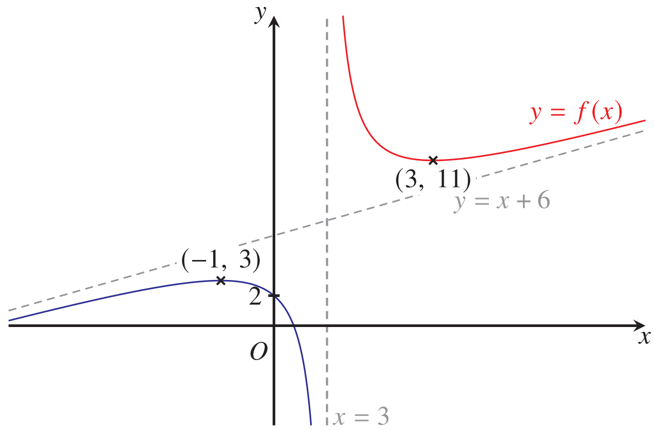
斜漸近線為 $y = x + 6$。 1A

(d) y 截距為 2。 1A

（極大點、極小點） 1A

（漸近線） 1A

（全部正確） 1A



3. (a) $f(-4) = -5$

$$\frac{(-4)^2 + a(-4) + b}{-4 + 2} = -5$$

$$-4a + b = -6$$

$$f'(x) = \frac{(2x + a)(x + 2) - (x^2 + ax + b)(1)}{(x + 2)^2}$$ 1M

$$= \frac{x^2 + 4x + 2a - b}{(x + 2)^2}$$ 1A

$$f'(-4) = 0$$

$$\frac{(-4)^2 + 4(-4) + 2a - b}{(-4 + 2)^2} = 0$$ 1M

$$2a - b = 0$$

求解後，可得 $a = 3$ 及 $b = 6$。 1A

(b) 垂直漸近線為 $x = -2$。 1A

$$f(x) = x + 1 + \frac{4}{x + 2}$$ 1M

斜漸近線為 $y = x + 1$。 1A

(c) $f'(x) = \dfrac{x^2 + 4x}{(x + 2)^2} = \dfrac{x(x + 4)}{(x + 2)^2}$

當 $f'(x) = 0$ 時，$x = 0$ 或 -4。 1M

x	$x < -4$	$-4 < x < -2$	$-2 < x < 0$	$x > 0$
$f'(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$

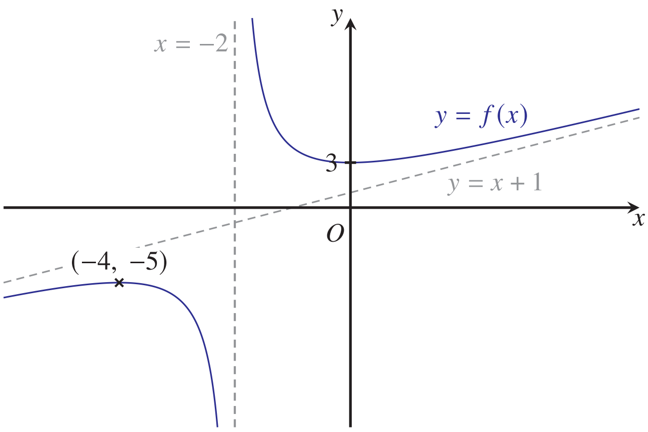
1M

極大點為 $(-4, -5)$。 1A

極小點為 $(0, 3)$。 1A

(d)（形狀） 1A

（全部正確） 1A



4. (a) $f'(x) = -3x^2 + 2ax + b$ 1A

$P\,(1,\ 3)$ 為轉向點。

$$\begin{cases} -1^3 + a(1)^2 + b(1) - 5 = 3 \\ \quad -3(1)^2 + 2a(1) + b = 0 \end{cases}$$ 1M

求解後，可得 $a = -6$ 及 $b = 15$。 1A

(b) $f''(x) = -6x - 12$

$f''(1) = -6(1) - 12 = -18 < 0$ 1M

因此，P 為 Γ 的極大點。 1A

(c) $f'(x) = -3x^2 - 12x + 15 = -3(x+5)(x-1)$ 1M

當 $f'(x) = 0$ 時，$x = -5$ 或 1。

$f''(-5) = -6(-5) - 12 = 18 > 0$

$f(-5) = -(-5)^3 - 6(-5)^2 + 15(-5) - 5 = -105$

$f(x)$ 的極小值為 -105。 1A

(d) $f''(x) = -6(x+2)$

當 $f''(x) = 0$ 時，$x = -2$。

x	$x < -2$	$x > -2$
$f''(x)$	+	−

1M

拐點為 $(-2,\ -51)$。 1A

(e) L 的方程為 $y = -3$。

$$\begin{aligned} -x^3 - 6x^2 + 15x - 5 &= -3 \\ x^3 + 6x^2 - 15x + 8 &= 0 \\ (x-1)^2(x+8) &= 0 \\ x &= 1 \quad \text{或} \quad -8 \end{aligned}$$ 1M

所求面積

$= \displaystyle\int_{-8}^{1} [-3 - f(x)]\,\mathrm{d}x$ 1M

$= \displaystyle\int_{-8}^{1} (x^3 + 6x^2 - 15x + 8)\,\mathrm{d}x$

$= \left[\dfrac{x^4}{4} + 2x^3 - \dfrac{15x^2}{2} + 8x\right]_{-8}^{1}$ 1M

$= \dfrac{2187}{4}$ 1A

5. (a) $f'(x) = \dfrac{2x(x-3)-(x^2+a)(1)}{(x-3)^2}$ 1M

$= \dfrac{x^2-6x-a}{(x-3)^2}$

$f'(5) = 0 = \dfrac{5^2-6(5)-a}{(5-3)^2}$ 1M

$a = -5$ 1A

(b) $f'(x) = \dfrac{(x-1)(x-5)}{(x-3)^2}$

當 $f'(x) = 0$ 時，$x = 1$ 或 5。 1M

x	$x < 1$	$1 < x < 3$	$3 < x < 5$	$x > 5$
$f'(x)$	+	−	−	+

1M

C 的極大點為 $(1,\ 2)$。 1A

(c) 垂直漸近線 $x = 3$。 1A

$f(x) = \dfrac{x^2-5}{x-3}$

$= x+3+\dfrac{4}{x-3}$ 1M

斜漸近線為 $y = x+3$。 1A

(d) 面積 $= \displaystyle\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} f(x)\,\mathrm{d}x$ 1M+1A

$= \displaystyle\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} \left(x+3+\frac{4}{x-3}\right)\mathrm{d}x$

$= \left[\dfrac{x^2}{2}+3x+4\ln|x-3|\right]_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}}$ 1A

$= \left(\dfrac{5}{2}+3\sqrt{5}+4\ln\left(3-\sqrt{5}\right)\right)-\left(\dfrac{5}{2}-3\sqrt{5}+4\ln\left(\sqrt{5}+3\right)\right)$

$= 6\sqrt{5}+4\ln\dfrac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$ 1A

6. (a) $f(x) = \dfrac{(3-2x)^2}{(x+1)^2}$

$= 4 - \dfrac{20}{x+1} + \dfrac{25}{(x+1)^2}$

$f'(x) = \dfrac{20}{(x+1)^2} - \dfrac{50}{(x+1)^3}$

$= \dfrac{10(2x-3)}{(x+1)^3}$ 1A

$f''(x) = \dfrac{20}{(x+1)62} - \dfrac{50}{(x+1)^3}$

$= \dfrac{-10(4x-11)}{(x+1)^4}$ 1

(b) 當 $f'(x) = 0$ 時，$x = \dfrac{3}{2}$。

x	$x < -1$	$-1 < x < \frac{3}{2}$	$x > \frac{3}{2}$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$

1M

沒有極大點。

極小點為 $\left(\dfrac{3}{2}, 0\right)$。 1A

當 $f''(x) = 0$ 時，$x = \dfrac{11}{4}$。

x	$x < -1$	$-1 < x < \frac{11}{4}$	$x > \frac{11}{4}$
$f''(x)$	$+$	$+$	$-$

拐點為 $\left(\dfrac{11}{4}, \dfrac{4}{9}\right)$。 1A

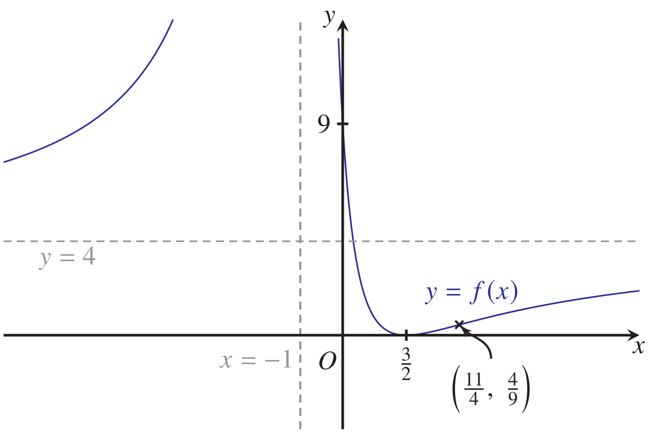
(c) 垂直漸近線為 $x = -1$。 1A

$f(x) = 4 - \dfrac{20}{x+1} + \dfrac{25}{(x+1)^2}$ 1M

水平漸近線為 $y = 4$。 1A

(d)（形狀及漸近線） 1A

（特殊點及全確正確） 1A



(e) 所求面積

$= \int_0^{\frac{3}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x$ 1A

$= \int_0^{\frac{3}{2}} \left(4 - \frac{20}{x+1} + \frac{25}{(x+1)^2}\right) \mathrm{d}x$

$= \left[4x - 20\ln|x+1| - \frac{25}{x+1}\right]_0^{\frac{3}{2}}$ 1M

$= 21 - 20\ln\frac{5}{2}$ 1A

7. (a) 垂直漸近線為 $x = -1$。 1A

$f(x) = x + \frac{1}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^2}$ 1M

斜漸近線為 $y = x$。 1A

(b) (i) $f'(x) = 1 - \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{6}{(x+1)^3}$ 1M

$= \frac{(x-1)(x^2+4x+6)}{(x+1)^3}$

當 $f'(x) = 0$ 時，$x = 1$。

x	$x < -1$	$-1 < x < 1$	$x > 1$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$

1M

當 $x = 1$ 時，C 有一極小點。 1

(ii) 所求坐標為 $\left(1,\ \frac{9}{4}\right)$。 1A

(c) (i) $b = \frac{0+0+0+4}{(0+1)^2}$

$b = 4$ 1A

(ii) 所求面積

$= \int_0^1 [4 - f(x)]\,\mathrm{d}x$ 1M

$= \int_0^1 \left(4 - x - \frac{1}{x+1} - \frac{3}{(x+1)^2}\right) \mathrm{d}x$ 1M

$= \left[4x - \frac{x^2}{2} - \ln|x+1| + \frac{3}{x+1}\right]_0^1$ 1M

$= 2 - \ln 2$ 1A

8. (a) $f(x)=\dfrac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$

$=x-5+\dfrac{12}{x+1}-\dfrac{8}{(x+1)^2}$

$f'(x)=1-\dfrac{12}{(x+1)^2}+\dfrac{16}{(x+1)^3}$ 1M

$=\dfrac{(x-1)^2(x+5)}{(x+1)^3}$ 1

$f''(x)=\dfrac{24}{(x+1)^3}-\dfrac{48}{(x+1)^4}$

$=\dfrac{24(x-1)}{(x+1)^4}$ 1A

(b) 當 $f'(x)=0$ 時，$x=1$ 或 -5。

x	$x<-5$	$-5<x<-1$	$-1<x<1$	$x>1$
$f'(x)$	+	−	+	+

1M

極大點為 $\left(-5,\ -\dfrac{27}{2}\right)$。 1A

沒有極小點。

當 $f''(x)=0$ 時，$x=1$。

x	$x<-1$	$-1<x<1$	$x>1$
$f''(x)$	−	−	+

1M

拐點為 $(1,\ 0)$。 1A

(c) (i) $f'(3)=\dfrac{1}{2}$

所求方程為

$\dfrac{y-\frac{1}{2}}{x-3}=\dfrac{1}{2}$

$y=\dfrac{x}{2}-1$ 1A

(ii) $f(x)=\dfrac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$

當 $1<x<3$ 時，可得 $(x-1)^3>0$ 及 $(x+1)^2>2$。

因此，$f(x)>0$ 及在區間 $(1,\ 3)$ 內，G 在 x 軸以上。 1

當 $1<x<3$ 時，$f''(x)=\dfrac{24(x-1)}{(x+1)^4}>0$。

G 在區間 $(1,\ 3)$ 內為凹以上的。

L 是 G 在 $x=3$ 的切線。

因此，G 在 L 之上。 1

(iii) 所求面積

$$= \int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_2^3 \left(\frac{x}{2} - 1\right) \mathrm{d}x \qquad \text{1M}$$

$$= \int_1^3 \left(x - 5 + \frac{12}{x+1} - \frac{8}{(x+1)^2}\right) \mathrm{d}x - \int_2^3 \left(\frac{x}{2} - 1\right) \mathrm{d}x$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} - 5x + 12\ln|x+1| + \frac{8}{x+1}\right]_1^3 - \left[\frac{x^2}{4} - x\right]_2^3 \qquad \text{1M}$$

$$= 12\ln 2 - \frac{33}{4} \qquad \text{1A}$$

9. (a) 垂直漸近線為 $x = -2$。 1A

$$f(x) = x - 10 + \frac{48}{x+2} - \frac{64}{(x+2)^2} \qquad \text{1M}$$

斜漸近線為 $y = x - 10$。 1A

(b) $f'(x) = 1 - \dfrac{48}{(x+2)^2} + \dfrac{128}{(x+2)^3}$ 1M

$$f''(x) = \frac{96}{(x+2)^3} - \frac{384}{(x+2)^4}$$

$$= \frac{96(x-2)}{(x+2)^4} \qquad \text{1A}$$

(c) $f'(x) = \dfrac{(x-2)^2(x+10)}{(x+2)^3}$

當 $f'(x) = 0$ 時，$x = 2$ 或 -10。

x	$x < -10$	$-10 < x < -2$	$-2 < x < 2$	$x > 2$
$f'(x)$	+	−	+	+

1M

只有一個轉向點在 $x = -10$，是一個極大點。

不同意該宣稱。 1A

(d) 當 $f''(x) = 0$ 時，$x = 2$。

x	$x < -2$	$-2 < x < 2$	$x > 2$
$f''(x)$	−	−	+

1M

拐點為 (2, 0)。 1A

(e) 所求面積

$$= \int_0^2 \left(x - 10 + \frac{48}{x+2} - \frac{64}{(x+2)^2}\right) \mathrm{d}x \qquad \text{1M}$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} - 10x + 48\ln|x+2| + \frac{64}{x+2}\right]_0^2 \qquad \text{1M}$$

$$= 34 - 48\ln 2 \qquad \text{1A}$$

10. (a) $f(x)=\dfrac{x^2+cx-5}{x+3}$

$=x+c-3+\dfrac{4-3c}{x+3}$

斜漸近線為 $y=x+c-3$。 1M

$1=8+c-3$

$c=-4$ 1A

(b) $f(x)=x-7+\dfrac{16}{x+3}$

$f'(x)=1-\dfrac{16}{(x+3)^2}$ 1M

$=\dfrac{(x+7)(x-1)}{(x+3)^2}$ 1A

(c) 當 $f'(x)=0$ 時，$x=-7$ 或 1。 1M

x	$x<-7$	$-7<x<-3$	$-3<x<1$	$x>1$
$f'(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$

1M

極大點為 $(-7,\ -18)$。 1A

極小點為 $(1,\ -2)$。 1A

(d) R 的面積

$=\displaystyle\int_0^m (x+9-f(x))\,\mathrm{d}x$ 1M

$=\displaystyle\int_0^m \left(16-\frac{16}{x+3}\right)\mathrm{d}x$

$=\Big[16x-16\ln|x+3|\Big]_0^m$ 1M

$=16m-16\ln(m+3)+16\ln 3$ 1A

$<16m-16\ln 3+16\ln 3$

$=16m$

R 的面積小於 $16m$。 1A

11. (a) 垂直漸近線為 $x = 1$。 1A

$$f(x) = x + 4 + \frac{7}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2}$$ 1M

斜漸近線為 $y = x + 4$。 1A

(b) $$f'(x) = 1 - \frac{7}{(x-1)^2} - \frac{6}{(x-1)^3}$$ 1M

$$= \frac{x(x-4)(x+1)}{(x-1)^3}$$ 1A

$$f''(x) = \frac{14}{(x-1)^3} + \frac{18}{(x-1)^4}$$

$$= \frac{14x+4}{(x-1)^4}$$ 1A

(c) 當 $f'(x) = 0$ 時，$x = -1$ 或 0 或 4。 1M

x	$x < -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x < 1$	$1 < x < 4$	$x > 4$
$f'(x)$	+	−	+	−	+

1M

極大點為 $\left(-1,\ \frac{1}{4}\right)$。 1A

極小點為 $(0,\ 0)$ 及 $\left(4,\ \frac{32}{3}\right)$。 1A

(d) 所求面積

$$= \int_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-2}^{0} \left(x + 4 + \frac{7}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2}\right) \mathrm{d}x$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} + 4x + 7\ln|x-1| - \frac{3}{x-1}\right]_{-2}^{0}$$ 1M

$$= 8 - 7\ln 3$$ 1A

12. (a) $f(x)=\dfrac{(x-6)(x+3)}{x+6}$

$=x-9+\dfrac{36}{x+6}$

$f'(x)=1-\dfrac{36}{(x+6)^2}$ 1M

$=\dfrac{x(x+12)}{(x+6)^2}$ 1A

(b) 當 $f'(x)=0$ 時，$x=0$ 或 -12。 1M

x	$x<-12$	$-12<x<-6$	$-6<x<0$	$x>0$
$f'(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$

1M

極大點為 $(-12,\ -27)$。 1A

極小點為 $(0,\ -3)$。 1A

(c) 垂直漸近線為 $x=-6$。 1A

$f(x)=x-9+\dfrac{36}{x+6}$ 1M

斜漸近線為 $y=x-9$。

G 只有兩漸近線。

同意該宣稱。 1A

(d) 所求面積

$=\displaystyle\int_{-3}^{6}-f(x)\,\mathrm{d}x$ 1M

$=\displaystyle\int_{-3}^{6}\left(-x+9-\frac{36}{x+6}\right)\mathrm{d}x$

$=\left[-\dfrac{x^2}{2}+9x-36\ln|x+6|\right]_{-3}^{6}$ 1M

$=\dfrac{135}{2}-72\ln 2$ 1A

13. (a) 垂直漸近線為 $x = -\frac{1}{2}$。 1A

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x}{2x+1}$$

$$= \frac{x}{2} - \frac{9}{4} + \frac{9}{4(2x+1)}$$ 1M

斜漸近線為 $y = \frac{x}{2} - \frac{9}{4}$。 1A

(b) $f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{9}{4}(2x+1)^{-2}(2)$ 1M

$$= \frac{1}{2} - \frac{9}{2(2x+1)^2}$$ 1A

(c) $\frac{1}{2} - \frac{9}{2(2x+1)^2} = 0$ 1M

$$(2x+1)^2 = 9$$

$$x = -2 \quad 或 \quad 1$$

x	$x < -2$	$-2 < x < -\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} < x < 1$	$x > 1$
$f'(x)$	+	−	−	+

1M

極大點為 $(-2,\ -4)$ 及極小點為 $(1,\ -1)$。 1A+1A

(d) $0 = \frac{x^2 - 4x}{2x+1}$

$x = 0$ 或 4

面積 $= \int_0^4 [-f(x)]\,\mathrm{d}x$ 1M+1A

$$= \int_0^4 \left(\frac{9}{4} - \frac{x}{2} - \frac{9}{4(2x+1)}\right) \mathrm{d}x$$

$$= \left[\frac{9x}{4} - \frac{x^2}{4} - \frac{9}{8}\ln|2x+1|\right]_0^4$$ 1M

$$= 5 - \frac{9}{8}\ln 9$$ 1A

14. (a) $g'(x) = \dfrac{(1)(x^2+k)-(x-4)(2x)}{(x-4)^2}$ 1M

$= \dfrac{-x^2+8x+k}{(x-4)^2}$

$g(x)$ 在 $x = 5$ 時達至局部極小值。

$$g'(5) = \frac{-5^2+8(5)+k}{(5-4)^2} = 0$$

$k = -15$ 1A

(b) $g'(x) = \dfrac{(x-3)(x-5)}{(x-4)^2}$

當 $g'(x) = 0$，$x = 3$ 或 5。

x	$x < 3$	$3 < x < 4$	$4 < x < 5$	$x > 5$
$g'(x)$	+	−	−	+

1M

H 的極大點為 $(3,\ 6)$。 1A

H 的極小點為 $(5,\ 10)$。 1A

(c) 垂直漸近線為 $x = 4$。 1A

$$g(x) = \frac{x^2-15}{x-4}$$

$= x+4+\dfrac{1}{x-4}$ 1M

斜漸近線為 $y = x+4$。 1A

(d) $g(x) = x+4+\dfrac{1}{x-4}$

$g''(x) = \dfrac{2}{(x-4)^3}$

留意對所有 $x \neq 4$，$g''(x) \neq 0$。

該曲線沒有拐點。

同意該宣稱。 1A

(e) 所求面積

$= \displaystyle\int_0^{\sqrt{15}} \left(x+4+\frac{1}{x-4}\right) dx$ 1M

$= \left[\dfrac{x^2}{2}+4x+\ln|x-4|\right]_0^{\sqrt{15}}$ 1M

$= \dfrac{15}{2} - 10\sqrt{15} + \ln\left(4-\sqrt{15}\right) - 2\ln 2$ 1A

15. (a) $f(x)=\dfrac{(x-6)^3}{(x+6)^2}$

$=x-30+\dfrac{432}{x+6}-\dfrac{1728}{(x+6)^2}$

$f'(x)=1-\dfrac{432}{(x+6)^2}+\dfrac{3456}{(x+6)^3}$ 1M

$=\dfrac{(x+30)(x-6)^2}{(x+6)^3}$ 1A

$f''(x)=\dfrac{864}{(x+6)^3}-\dfrac{10\,368}{(x+6)^4}$

$=\dfrac{864(x-6)}{(x+6)^4}$ 1A

(b) 當 $f'(x)=0$ 時，$x=-30$ 或 6。

x	$x<-30$	$-30<x<-6$	$-6<x<6$	$x>6$
$f'(x)$	+	−	+	+

1M

極大點為 $(-30,\ -81)$。

H 有 1 個轉向點。 1A

(c) 垂直漸近線為 $x=-6$。 1A

$f(x)=x-30+\dfrac{432}{x+6}-\dfrac{1728}{(x+6)^2}$ 1M

斜漸近線為 $y=x-30$。 1A

(d) (i) 可得 $f(3)=-\dfrac{1}{3}$ 及 $f'(3)=\dfrac{11}{27}$。 1M

所求方程為

$\dfrac{y+\frac{1}{3}}{x-3}=\dfrac{11}{27}$

$y=\dfrac{11x}{27}-\dfrac{14}{9}$ 1A

(ii) 所求面積

$=\displaystyle\int_3^{\frac{42}{11}}\left[\left(\frac{11x}{27}-\frac{14}{9}\right)-f(x)\right]\mathrm{d}x+\int_{\frac{42}{11}}^{6}[-f(x)]\,\mathrm{d}x$ 1M

$=\displaystyle\int_3^{\frac{42}{11}}\left(\frac{11x}{27}-\frac{14}{9}\right)\mathrm{d}x-\int_3^{6}\left(x-30+\frac{432}{x+6}-\frac{1728}{(x+6)^2}\right)\mathrm{d}x$

$=\left[\dfrac{11x^2}{54}-\dfrac{14x}{9}\right]_3^{\frac{42}{11}}-\left[\dfrac{x^2}{2}-30x+432\ln|x+6|+\dfrac{1728}{x+6}\right]_3^{6}$ 1M

$=\dfrac{1368}{11}+432\ln\dfrac{3}{4}$ 1A

16. (a) 垂直漸近線為 $x=-1$。 1A

$$f(x)=x-8+\frac{27}{x+1}-\frac{27}{(x+1)^2}$$ 1M

斜漸近線為 $y=x-8$。 1A

(b) $f'(x)=1-\dfrac{27}{(x+1)^2}+\dfrac{54}{(x+1)^3}$ 1M

$=\dfrac{(x+7)(x-2)^2}{(x+1)^3}$

當 $f'(x)=0$ 時，$x=2$ 或 -7。

x	$x<-7$	$-7<x<-1$	$-1<x<2$	$x>2$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$	$+$

1M

G 有恰好一個轉向點，為於 $x=-7$ 時的極大值點。 1

(c) $f''(x)=\dfrac{54}{(x+1)^3}-\dfrac{162}{(x+1)^4}$

$=\dfrac{54(x-2)}{(x+1)^4}$ 1A

當 $f''(x)=0$ 時，$x=2$。

x	$x<-1$	$-1<x<2$	$x>2$
$f''(x)$	$-$	$-$	$+$

1M

拐點為 $(2,\ 0)$。 1A

(d) 設 $u=x+1$。則 $\mathrm{d}u=\mathrm{d}x$。

所求體積

$=\pi\displaystyle\int_0^2\left[\frac{(x-2)^3}{(x+1)^2}\right]^2\mathrm{d}x$ 1M

$=\pi\displaystyle\int_1^3\frac{(u-3)^6}{u^4}\,\mathrm{d}u$

$=\pi\displaystyle\int_1^3\frac{u^6-18u^5+135u^4-540u^3+1215u^2-1458u+729}{u^4}\,\mathrm{d}u$ 1M

$=\pi\displaystyle\int_1^3(u^2-18u+135-540u^{-1}+1215u^{-2}-1458u^{-3}+729u^{-4})\,\mathrm{d}u$

$=\pi\left[\dfrac{u^3}{3}-9u^2+135u-540\ln|u|-1215u^{-1}+\dfrac{729}{u^2}-\dfrac{243}{u^3}\right]_1^3$

$=\pi\left(\dfrac{1808}{3}-540\ln 3\right)$ 1A

17. (a) 垂直漸近線為 $x = -2$。 1A

$$f(x) = x - 7 + \frac{27}{x+2} - \frac{27}{(x+2)^2}$$ 1M

斜漸近線為 $y = x - 7$。 1A

(b) $f'(x) = 1 - \frac{27}{(x+2)^2} + \frac{54}{(x+2)^3}$ 1M

$$f''(x) = \frac{54}{(x+2)^3} - \frac{162}{(x+2)^4}$$
$$= \frac{54(x-1)}{(x+2)^4}$$ 1A

(c) $f'(x) = 1 - \frac{27}{(x+2)^2} + \frac{54}{(x+2)^3}$

$$= \frac{(x-1)^2(x+8)}{(x+2)^3}$$

當 $f'(x) = 0$ 時，$x = 1$ 或 -8。

x	$x < -8$	$-8 < x < -2$	$-2 < x < 1$	$x > 1$
$f'(x)$	+	−	+	+

1M

極大點為 $\left(-8,\ -\frac{81}{4}\right)$。

G 有一個轉向點。 1A

(d) 當 $f''(x) = 0$ 時，$x = 1$。

x	$x < -2$	$-2 < x < 1$	$x > 1$
$f''(x)$	−	−	+

1M

拐點為 $(1,\ 0)$。 1A

(e) 設 $u = x + 2$。則 $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$。

所求體積

$$= \pi \int_0^1 [f(x)]^2 \,\mathrm{d}x$$ 1M

$$= \pi \int_2^3 \frac{(u-3)^6}{u^4} \,\mathrm{d}u$$

$$= \pi \int_2^3 \frac{u^6 - 18u^5 + 135u^4 - 540u^3 + 1215u^2 - 1458u + 729}{u^4} \,\mathrm{d}u$$ 1M

$$= \pi \int_2^3 \left(u^2 - 18u + 135 - \frac{540}{u} + \frac{1215}{u^2} - \frac{1458}{u^3} + \frac{729}{u^4}\right) \mathrm{d}u$$

$$= \pi \left[\frac{u^3}{3} - 9u^2 + 135u - 540\ln|u| - \frac{1215}{u} + \frac{729}{u^2} - \frac{243}{u^3}\right]_2^3$$ 1M

$$= \pi \left(\frac{5255}{24} + 540\ln\frac{2}{3}\right)$$ 1A

18. (a) 垂直漸近線為 $x = -1$。 1A

$$f(x) = x - 5 + \frac{12}{x+1} - \frac{8}{(x+1)^2}$$ 1M

斜漸近線為 $y = x - 5$。 1A

(b) $f'(x) = 1 - \dfrac{12}{(x+1)^2} + \dfrac{16}{(x+1)^3}$ 1M

$$f''(x) = \frac{24}{(x+1)^3} - \frac{48}{(x+1)^4}$$

$$= \frac{24(x-1)}{(x+1)^4}$$ 1A

(c) $f'(x) = 1 - \dfrac{12}{(x+1)^2} + \dfrac{16}{(x+1)^3}$

$$= \frac{(x-1)^2(x+5)}{(x+1)^3}$$

當 $f'(x) = 0$ 時，$x = 1$ 或 -5。

x	$x < -5$	$-5 < x < -1$	$-1 < x < 1$	$x > 1$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$	$+$

1M

極大點為 $\left(-5,\ -\dfrac{27}{2}\right)$。

Γ 有一個轉向點。

同意該宣稱。 1A

(d) 當 $f''(x) = 0$ 時，$x = 1$。

x	$x < -1$	$-1 < x < 1$	$x > 1$
$f''(x)$	$-$	$-$	$+$

1M

拐點為 $(1,\ 0)$。 1A

(e) 設 $u = x + 1$。則 $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$。

所求體積

$$= \pi \int_0^1 [f(x)]^2 \, \mathrm{d}x$$ 1M

$$= \pi \int_1^2 \frac{(u-2)^6}{u^4} \, \mathrm{d}u$$

$$= \pi \int_1^2 \frac{u^6 - 12u^5 + 60u^4 - 160u^3 + 240u^2 - 192u + 64}{u^4} \, \mathrm{d}u$$ 1M

$$= \pi \int_1^2 \left(u^2 - 12u + 60 - \frac{160}{u} + \frac{240}{u^2} - \frac{192}{u^3} + \frac{64}{u^4}\right) \mathrm{d}u$$

$$= \pi \left[\frac{u^3}{3} - 6u^2 + 60u - 160 \ln |u| - \frac{240}{u} + \frac{96}{u^2} - \frac{64}{3u^3}\right]_1^2$$ 1M

$$= (111 - 160 \ln 2)\pi$$ 1A

19. (a) $f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + 3}{x - 1}$

$= ax + (a + b) + \dfrac{a + b + 3}{x - 1}$ 1M

斜漸近線為 $y = ax + (a + b)$。

可得 $a = 4$ 及 $a + b = 1$。

求解後，可得 $a = 4$ 及 $b = -3$。 1A

(b) $f(x) = 4x + 1 + \dfrac{4}{x - 1}$

$f'(x) = 4 - \dfrac{4}{(x - 1)^2}$ 1M

$= \dfrac{4x(x - 2)}{(x - 1)^2}$ 1A

(c) 當 $f'(x) = 0$ 時，$x = 0$ 或 2。 1M

x	$x < 0$	$0 < x < 1$	$1 < x < 2$	$x > 2$
$f'(x)$	+	−	−	+

1M

極大點為 $(0,\ -3)$。 1A

極小點為 $(2,\ 13)$。 1A

(d) 設 $u = x - 1$。則 $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$。

所求體積

$= \pi \displaystyle\int_2^4 (f(x) - 1)^2 \,\mathrm{d}x$ 1M

$= \pi \displaystyle\int_2^4 \left(4x + \frac{4}{x - 1}\right)^2 \mathrm{d}x$

$= 16\pi \displaystyle\int_2^4 \left[x + \frac{2x}{x - 1} + \frac{1}{(x - 1)^2}\right] \mathrm{d}x$

$= 16\pi \displaystyle\int_1^3 \left[(u + 1)^2 + 2 + \frac{2}{u} + \frac{1}{u^2}\right] \mathrm{d}u$

$= 16\pi \left[\dfrac{(u + 1)^3}{3} + 2u + 2\ln|u| - \dfrac{1}{u}\right]_1^3$ 1M

$= \dfrac{1120\pi}{3} + 32\pi \ln 3$ 1A

(e) 留意 $f(3) = 15$ 及 $f'(3) = 3$。

設 $(\alpha,\ 0)$ 為 A 的坐標。

$$\frac{0 - 15}{\alpha - 3} = 3$$

$$\alpha = -2$$

A 的坐標為 $(-2,\ 0)$。 1M

當 P 最接近 x 軸時，$\triangle OAP$ 的面積最小。

P 的坐標為 $(0,\ -3)$。

$\triangle OAP$ 的最小面積

$= \frac{1}{2}(0+2)(0+3)$

$= 3$

因此，$\triangle OAP$ 的面積不可能小於 3。 1A

20. (a) -6 1A

(b) (i) 垂直漸近線為 $x = 10$。 1A

(ii) $f(x) = x - 6 + \frac{36}{x-10}$

$f'(x) = 1 - \frac{36}{(x-10)^2}$ 1M

$= \frac{(x-4)(x-16)}{(x-10)^2}$

當 $f'(x) = 0$ 時，$x = 4$ 或 16。 1A

x	$x < 4$	$4 < x < 10$	$10 < x < 16$	$x > 16$
$f'(x)$	+	−	−	+

1M

極大點為 $(4, -8)$。 1A

極小點為 $(16, 16)$。 1A

(c) $x - 6 + \frac{36}{x-10} = 24$

$(x-6)(x-10) + 36 = 24(x-10)$

$x^2 - 40x + 336 = 0$

$x = 12$ 或 28 1A

設 $u = x - 10$。則 $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$。

所求體積

$= \pi \int_{12}^{28} [f(x) - 24]^2 \, \mathrm{d}x$ 1M

$= \pi \int_{2}^{18} \left[(u-20) + \frac{36}{u}\right]^2 \mathrm{d}u$

$= \pi \int_{2}^{18} \left[(u-20)^2 + \frac{72(u-20)}{u} + \frac{1296}{u^2}\right] \mathrm{d}u$ 1M

$= \pi \int_{2}^{18} \left[(u-20)^2 + 72 - \frac{1440}{u} + \frac{1296}{u^2}\right] \mathrm{d}u$

$= \pi \left[\frac{(u-20)^3}{3} + 72u - 1440 \ln|u| - \frac{1296}{u}\right]_2^{18}$ 1M

$= \left(\frac{11\,008}{3} - 2880 \ln 3\right)\pi$ 1A

21. (a) 垂直漸近線為 $x = 4$。 1A

$$f(x) = x + 1 + \frac{4}{x-4}$$ 1M

斜漸近線為 $y = x + 1$。 1A

(b) $f'(x) = 1 - \dfrac{4}{(x-4)^2}$ 1M

$= \dfrac{(x-2)(x-6)}{(x-4)^2}$ 1A

(c) 當 $f'(x) = 0$ 時，$x = 2$ 或 $x = 6$。 1A

x	$x < 2$	$2 < x < 4$	$4 < x < 6$	$x > 6$
$f'(x)$	+	−	−	+

1M

極大點為 $(2,\ 1)$。 1A

極小點為 $(6,\ 9)$。 1A

(d) 設 $u = x - 4$。則 $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$。

所求體積

$= \pi \displaystyle\int_0^3 [f(x)]^2\,\mathrm{d}x$ 1M

$= \pi \displaystyle\int_{-4}^{-1} \left[(u+5) + \frac{4}{u}\right]^2 \mathrm{d}u$ 1M

$= \pi \displaystyle\int_{-4}^{-1} \left[(u+5)^2 + \frac{8(u+5)}{u} + \frac{16}{u^2}\right] \mathrm{d}u$

$= \pi \displaystyle\int_{-4}^{-1} \left[(u+5)^2 + 8 + \frac{40}{u} + \frac{16}{u^2}\right] \mathrm{d}u$

$= \pi \left[\dfrac{(u+5)^3}{3} + 8u + 40\ln|u| - \dfrac{16}{u}\right]_{-4}^{-1}$ 1M

$= (57 - 80\ln 2)\pi$ 1A

22. (a) 垂直漸近線為 $x=-2$。 1A

$$f(x)=x+5+\frac{4}{x+2}$$ 1M

斜漸近線為 $y=x+5$。 1A

(b) $f'(x)=1-\frac{4}{(x+2)^2}$ 1M

$$=\frac{x(x+4)}{(x+2)^2}$$

當 $f'(x)=0$ 時，$x=0$ 或 -4。 1M

x	$x<-4$	$-4<x<-2$	$-2<x<0$	$x>0$
$f'(x)$	+	−	−	+

1M

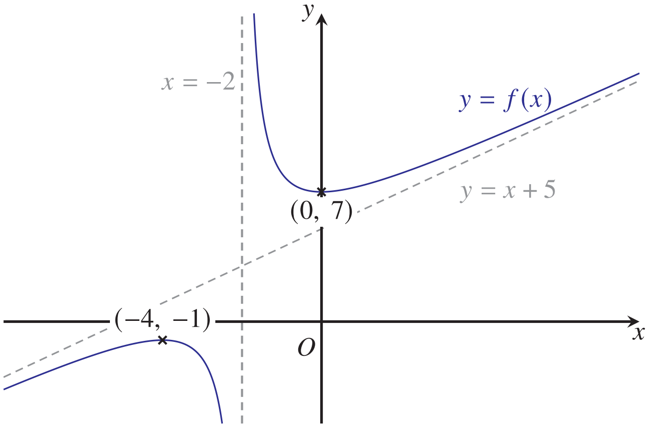
極大點為 $(-4,\ -1)$。 1A

極小點為 $(0,\ 7)$。 1A

(c)（形狀） 1A

（漸近線） 1A

（全部正確） 1A



(d) $\frac{x^2+7x+14}{x+2}=8$

$x^2-x-2=0$

$x=2$ 或 -1

設 $u=x+2$。則 $\mathrm{d}u=\mathrm{d}x$。

所求體積

$$= \pi \int_{-1}^{2} [f(x) - 8]^2 \, dx \qquad \text{1M}$$

$$= \pi \int_{1}^{4} \left[(u-5) + \frac{4}{u} \right]^2 du$$

$$= \pi \int_{1}^{4} \left[(u-5)^2 + \frac{8(u-5)}{u} + \frac{16}{u^2} \right] du$$

$$= \pi \int_{1}^{4} \left[(u-5)^2 + 8 - \frac{40}{u} + \frac{16}{u^2} \right] du$$

$$= \pi \left[\frac{(u-5)^3}{3} + 8u - 40 \ln |u| - \frac{16}{u} \right]_1^4 \qquad \text{1M}$$

$$= \pi (57 - 80 \ln 2) \qquad \text{1A}$$

23. (a) 垂直漸近線為 $x = -2$。 1A

$$f(x) = x - 8 + \frac{16}{x+2}$$ 1M

斜漸近線為 $y = x - 8$。 1A

(b) $f'(x) = 1 - \dfrac{16}{(x+2)^2}$ 1M

$= \dfrac{(x+6)(x-2)}{(x+2)^2}$

當 $f'(x) = 0$ 時，$x = 2$ 或 -6。

x	$x < -6$	$-6 < x < -2$	$-2 < x < 2$	$x > 2$
$f'(x)$	+	−	−	+

1M

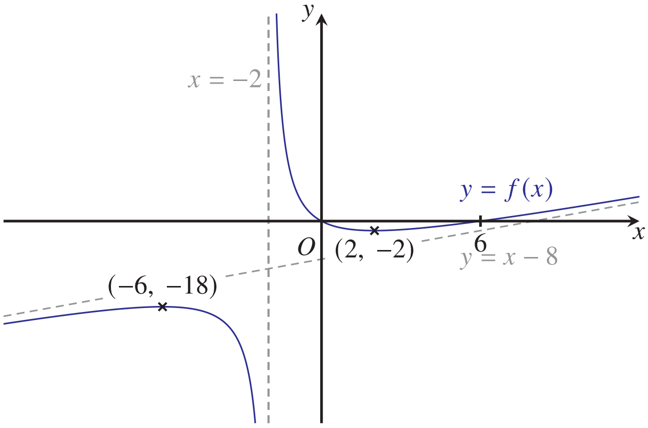
極大點為 $(-6,\ -18)$。 1A

極小點為 $(2,\ -2)$。 1A

(c)（形狀） 1A

（漸近線） 1A

（全部正確） 1A



(d) $\dfrac{x^2 - 6x}{x+2} = 7$

$x^2 - 13x - 14 = 0$

$x = 14$ 或 -1

設 $u = x + 2$。則 $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$。

所求體積

$$= \pi \int_{-1}^{14} [f(x) - 7]^2 \, dx$$ 1M

$$= \pi \int_{1}^{16} \left[u - 17 + \frac{16}{u}\right]^2 du$$

$$= \pi \int_{1}^{16} \left[(u - 17)^2 + \frac{32(u - 17)}{u} + \frac{256}{u^2}\right] du$$

$$= \pi \int_{1}^{16} \left[(u - 17)^2 + 32 - \frac{544}{u} + \frac{256}{u^2}\right] du$$

$$= \pi \left[\frac{(u - 17)^3}{3} + 32u - 544 \ln|u| - \frac{256}{u}\right]_1^{16}$$ 1M

$$= \pi(2085 - 2176 \ln 2)$$ 1A

24. (a) (i) $f(x)=\dfrac{162(x-1)}{(x+1)^3}$

$=\dfrac{162}{(x+1)^2}-\dfrac{324}{(x+1)^3}$

$f'(x)=-\dfrac{324}{(x+1)^3}+\dfrac{972}{(x+1)^4}$

$=\dfrac{324(2-x)}{(x+1)^4}$ 1A

$f''(x)=\dfrac{972}{(x+1)^4}-\dfrac{3888}{(x+1)^5}$

$=\dfrac{972(x-3)}{(x+1)^5}$ 1A

(ii) 當 $f'(x)=0$，$x=2$。

x	$x<-1$	$-1<x<2$	$x>2$
$f'(x)$	$+$	$+$	$-$

1M

極大點為 $(2,\ 6)$。 1A

沒有極小點。

當 $f''(x)=0$，$x=3$。

x	$x<-1$	$-1<x<3$	$x>3$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$

1M

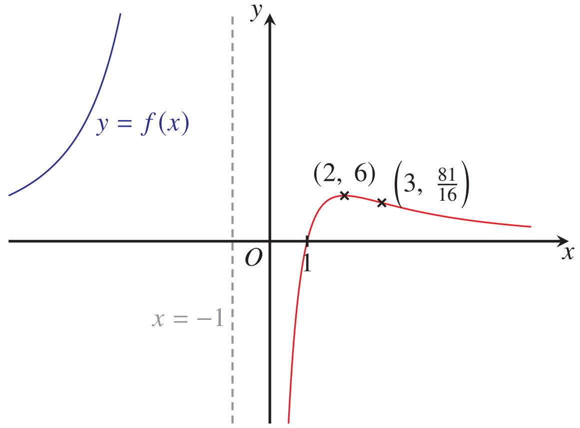
拐點為 $\left(3,\ \dfrac{81}{16}\right)$。 1A

(b) 垂直漸近線為 $x=-1$。 1A

水平漸近線為 $y=0$。 1A

(c)（形狀、極值點及拐點） 1A

（全部正確） 1A



(d) 設 $u=x+1$。則 $\mathrm{d}u=\mathrm{d}x$。

體積 $= \pi \int_0^1 \left[\frac{162(x-1)}{(x+1)^3}\right]^2 \mathrm{d}x$ 1M

$= 26\,244\pi \int_1^2 \frac{(u-2)^2}{u^6}\,\mathrm{d}u$

$= 26\,244\pi \int_1^2 (u^{-4} - 4u^{-5} + 4u^{-6})\,\mathrm{d}u$ 1M

$= 26\,244\left[\frac{u^{-3}}{-3} + u^{-4} - \frac{4u^{-5}}{5}\right]_1^2$

$= \frac{67\,797\pi}{20}$ 1A

25. (a) $f'(x) = \frac{(x-2)(2x) - (x^2+12)}{(x-2)^2}$ 1M

$= \frac{x^2 - 4x - 12}{(x-2)^2}$ 1A

(b) 當 $f'(x) = 0$，

$x^2 - 4x - 12 = 0$

$x = 6$ 或 -2 1A

x	$x < -2$	$-2 < x < 2$	$2 < x < 6$	$x > 6$	
$f'(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$	1M

$f(x)$ 的極大值及極小值分別為 $f(-2) = -4$ 及 $f(6) = 12$。 2

(c) 垂直漸近線為 $x = 2$。 1A

由於 $f(x) = x + 2 + \frac{16}{x-2}$。 1M

斜漸近線為 $y = x + 2$。 1A

(d) $\frac{x^2+12}{x-2} = 14$

$x^2 - 14x + 40 = 0$

$x = 4$ 或 10 1A

所求面積 $= \int_4^{10} \left(14 - \frac{x^2+12}{x-2}\right)\mathrm{d}x$ 1M

$= \int_4^{10} \left(12 - x - \frac{16}{x-2}\right)\mathrm{d}x$

$= \left[12x - \frac{x^2}{2} - 16\ln(x-2)\right]_4^{10}$ 1M

$= 30 - 32\ln 2$ 1A

26. (a) $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ 1A

由於 $P(-1,\ 10)$ 為 C 的轉向點，

$$\begin{cases} -1 + a - b + 5 = 10 \\ 3 - 2a + b = 0 \end{cases}$$ 1M

求解後，可得 $a = -3$ 及 $b = -9$。 1A

(b) $f''(x) = 6x - 6$

$f''(-1) = -12 < 0$ 1M

因此，P 為 C 的極大點。 1A

(c) $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 0$

$$x = -1 \quad 或 \quad 3$$ 1M

$f''(3) = 12 > 0$。

因此，$f(x)$ 的極小值為 $f(3) = -22$。 1A

(d) 當 $f''(x) = 0$ 時，$x = 1$。

x	$x < 1$	$x > 1$
$f''(x)$	$-$	$+$

1M

當 $x = 1$ 時，$y = -6$。

因此，C 的拐點為 $(1,\ -6)$。 1A

(e) L 的方程為 $y = 10$。

$$x^3 - 3x^2 - 9x + 5 = 10$$
$$x^3 - 3x^2 - 9x - 5 = 0$$
$$(x+1)^2(x-5) = 0$$
$$x = -1 \quad 或 \quad 5$$

所求面積 $= \displaystyle\int_{-1}^{5} [10 - (x^3 - 3x^2 - 9x + 5)]\,\mathrm{d}x$ 1M

$= \displaystyle\int_{-1}^{5} (-x^3 + 3x^2 + 9x + 5)\,\mathrm{d}x$

$= \left[\dfrac{-x^4}{4} + x^3 + \dfrac{9x^2}{2} + 5x\right]_{-1}^{5}$ 1M

$= 108$ 1A

27. (a) $f(x) = 20 + x + \dfrac{64(3x-4)}{(x-4)^2}$ 1M

斜漸近線為 $y = x + 20$。 1A

垂直漸近線為 $x = 4$。 1A

(b) $f'(x) = 1 + \dfrac{192(x-4)^2 - 128(3x-4)(x-4)}{(x-4)^4}$ 1M

$= 1 - \dfrac{64(3x+4)}{(x-4)^3}$

$f''(x) = \dfrac{192(3x+4)(x-4)^2 - 192(x-4)^3}{(x-4)^6}$

$= \dfrac{384(x+4)}{(x-4)^4}$ 1A

(c) 當 $f'(x) = 0$ 時，

$\dfrac{64(3x+4)}{(x-4)^3} = 1$

$192x + 256 = x^3 - 12x^2 + 48x - 64$

$0 = (x+4)^2(x-20)$

$x = 20$ 或 -4

x	$x < -4$	$-4 < x < 4$	$4 < x < 20$	$x > 20$
$f'(x)$	+	+	−	+

1M

只有一個轉向點。不同意該宣稱。 1A

(d) 當 $f''(x) = 0$ 時，$x = -4$。

x	$x < -4$	$-4 < x < 4$	$x > 4$
$f''(x)$	−	+	+

1M

拐點為 $(-4,\ 0)$。 1A

(e) 面積 $= \displaystyle\int_{-4}^{0}\left(x + 20 + \frac{64(3x-4)}{(x-4)^2}\right)\mathrm{d}x$ 1M

$= \left[\dfrac{x^2}{2} + 20x\right]_{-4}^{0} + 64\displaystyle\int_{-8}^{-4}\frac{3u+8}{u^2}\,\mathrm{d}u$ 其中$u = x - 4$ 1M

$= 72 + 64\displaystyle\int_{-8}^{-4}\left(\frac{3}{u} + \frac{8}{u^2}\right)\mathrm{d}u$

$= 72 + 64\left[3\ln|u| - \dfrac{8}{u}\right]_{-8}^{-4}$

$= 136 - 192\ln 2$ 1A

28. (a) $f(x)=\dfrac{x^2-5x}{x+4}$

$=x-9+\dfrac{36}{x+4}$ 1M

斜漸近線為 $y=x-9$，而垂直漸近線為 $x=-4$。 1A+1A

(b) $f(x)=x-9+\dfrac{36}{x+4}$

$f'(x)=1-\dfrac{36}{(x+4)^2}$ 1M

$=\dfrac{x^2+8x-20}{(x+4)^2}$ 1A

(c) 當 $f'(x)=0$ 時，

$x^2+8x-20=0$

$x=-10$ 或 2 1A

x	$x<-10$	$-10<x<-4$	$-4<x<2$	$x>2$
$f'(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$

1M

當 $x=-10$ 時，$y=-25$；當 $x=2$ 時，$y=-1$。

極大點為 $(-10,\ -25)$，極小點為 $(2,\ -1)$。 1A+1A

(d) When $f(x)=0$, $x=0$ or 5。

所求體積

$=\pi\displaystyle\int_0^5\left(x-9+\frac{36}{(x+4)^2}\right)^2 \mathrm{d}x$ 1M

$=\pi\displaystyle\int_0^5\left[(x-9)^2+\frac{72(x-9)}{x+4}+\frac{1296}{(x+4)^2}\right]\mathrm{d}x$

$=\pi\displaystyle\int_0^5\left[x^2-18x+153-\frac{936}{x+4}+\frac{1296}{(x+4)^2}\right]\mathrm{d}x$ 1M

$=\pi\left[\dfrac{x^3}{3}-9x^2+153x-936\ln|x+4|-\dfrac{1296}{x+4}\right]_0^5$ 1M

$=\dfrac{2285\pi}{3}-1872\pi\ln\dfrac{3}{2}$ 1A

29. (a) 垂直漸近線為 $x = 1$。 1A

$$f(x) = x + 4 + \frac{4}{x-1}$$ 1M

斜漸近線為 $y = x + 4$。 1A

(b) $f'(x) = 1 - 4(x-1)^{-2}$ 1A

$f''(x) = 8(x-1)^{-3}$

當 $f'(x) = 0$ 時，

$$1 = \frac{4}{(x-1)^2}$$ 1M

$x = 3$ 或 -1

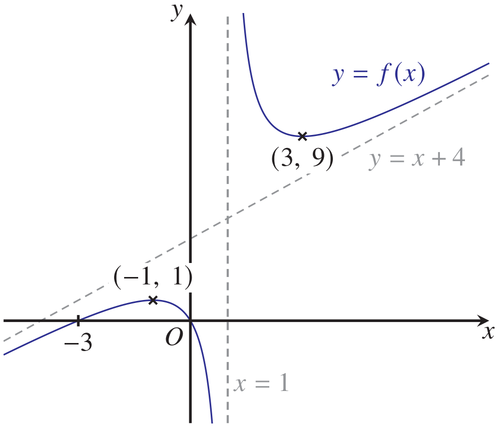
$f''(3) = 8(2)^{-3} = 1 > 0$ 及 $f''(-1) = 8(-2)^{-3} = -1 < 0$ 1M

極大點為 $(-1,\ 1)$，而極小點為 $(3,\ 9)$。 1A

(c) (正確點) 1A

(正確形狀) 1A

(全部正確) 1A



(d) $10 = \dfrac{x^2 + 3x}{x - 1}$

$x = 2$ 或 5

體積 $= \pi \displaystyle\int_2^5 (f(x) - 10)^2 \,dx$ 1M

$$= \pi \int_2^5 \left[(x-6)^2 + \frac{8(x-6)}{x-1} + \frac{16}{(x-1)^2} \right] dx$$

$$= \pi \int_2^5 \left[(x-6)^2 + 8\left(1 - \frac{5}{x-1}\right) + \frac{16}{(x-1)^2} \right] dx$$

$$= \pi \left[\frac{(x-6)^3}{3} + 8\left(x - 5\ln|x-1|\right) - \frac{16}{x-1} \right]_2^5$$ 1M

$$= \pi(57 - 80\ln 2)$$ 1A

30. (a) $f'(x) = \dfrac{(x-1)^2(x+5)}{(x+1)^3}$ 1A

$f''(x) = \dfrac{24(x-1)}{(x+1)^4}$ 1A

(b) 當 $f'(x) = 0$，$x = 1$ 或 -5。

x	$x < -5$	$-5 < x < -1$	$-1 < x < 1$	$x > 1$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$	$+$

當 $f''(x) = 0$，$x = 1$。

x	$x < -1$	$-1 < x < 1$	$x > 1$
$f''(x)$	$-$	$-$	$+$

(i) $x < -5$ 或 $-1 < x < 1$ 或 $x > 1$ 1A

(ii) $-5 < x < -1$ 1A

(iii) $x > 1$

(iv) $x < -1$ 或 $-1 < x < 1$ 1A

(c) $\left(-5,\ -\dfrac{27}{2}\right)$ 為相對極大點。 1A

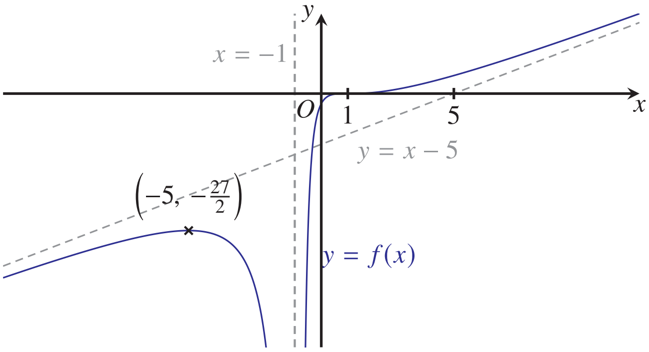
拐點為 $(1,\ 0)$。 1A

(d) 垂直漸近線為 $x = -1$。 1A

$f(x) = \dfrac{(x-1)^3}{(x+1)^2} = x - 5 + \dfrac{12x+4}{(x+1)^2}$

斜漸近線為 $y = x - 5$。 1A

(e)



1A+1A

31. (a) $f'(x) = \dfrac{(1+x^2)^2 - 2x(1+x^2)(2x)}{(1+x^2)^4} = \dfrac{1-3x^2}{(1+x^2)^3}$ 1A

$f''(x) = \dfrac{(1+x^2)^3(-6x) - (1-3x^2)\cdot 3(1+x^2)^2(2x)}{(1+x^2)^6} = \dfrac{-12x(1-x^2)}{(1+x^2)^4}$ 1A

(b) (i) 當 $f'(x) = 0$，$x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$。

x	$x < -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	$-\dfrac{1}{\sqrt{3}} < x < \dfrac{1}{\sqrt{3}}$	$x > \dfrac{1}{\sqrt{3}}$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$

所求之值為 $-\dfrac{1}{\sqrt{3}} < x < \dfrac{1}{\sqrt{3}}$。 1A

(ii) 當 $f''(x) = 0$，$x = 0$ 或 ± 1。

x	$x < -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x < 1$	$x > 1$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

1M

所求之值為 $-1 < x < 0$ 或 $x > 1$。 1A

(c) 極小點：$\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}, -\dfrac{3\sqrt{3}}{16}\right)$ 1A

極大點：$\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{3\sqrt{3}}{16}\right)$ 1A

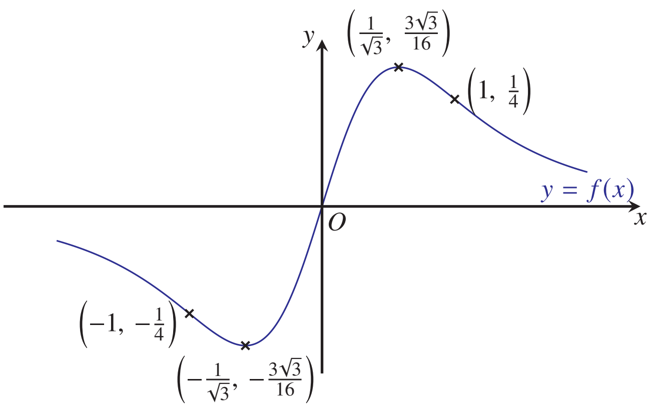
拐點：$\left(-1, -\dfrac{1}{4}\right)$、$(0, 0)$ 及 $\left(1, \dfrac{1}{4}\right)$ 1A

該曲線沒有垂直漸近線，水平漸近線為 $y = 0$。 1A

(d)（極值點及拐點） 1A

（水平漸近線） 1A

（曲線的形狀） 1A



32. (a) $f'(x) = 2x + \dfrac{8}{(x-1)^2}$ 1A

$f''(x) = 2 + \dfrac{16}{(1-x)^3}$ 1A

(b) 當 $f'(x) = 0$，

$$2x + \frac{8}{(x-1)^2} = 0$$
$$\frac{2x(x-1)^2 + 8}{(x-1)^2} = 0$$
$$\frac{2(x+1)(x^2-3x+4)}{(x-1)^2} = 0$$
$$x = -1$$

x	$x < -1$	$-1 < x < 1$	$x > 1$
$f'(x)$	$-$	$+$	$+$

(i) $-1 < x < 1$ 或 $x > 1$

(ii) $x < -1$ 1A

當 $f''(x) = 0$，

$$\frac{2(1-x)^3 + 16}{(1-x)^3} = 0$$
$$\frac{-2(x-3)(x^2+3)}{(1-x)^3} = 0$$
$$x = 3$$

x	$x < 1$	$1 < x < 3$	$x > 3$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$

(iii) $x < 1$ 或 $x > 3$ 1A

(iv) $1 < x < 3$ 1A

(c) 極小點為 $(-1, 5)$。 1A

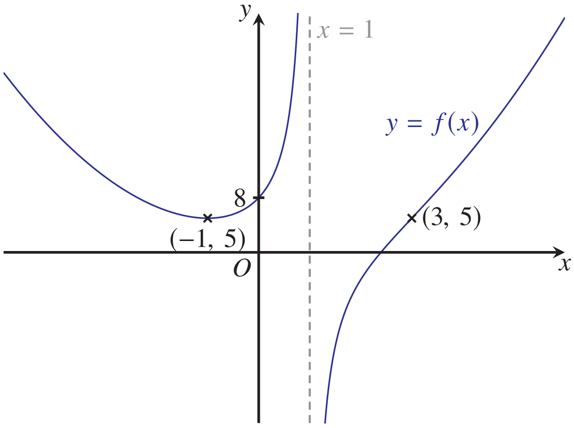
拐點為 $(3, 5)$。 1A

(d) 垂直漸近線為 $x = 1$。 1A

沒有斜漸近線。 *（可省略）*

(e)（極值點、拐點及漸近線） 1A

（曲線的形狀） 1A



33. (a) $f'(x) = \dfrac{x(x+12)}{(x+6)^2}$ 1A

$f''(x) = \dfrac{72}{(x+6)^3}$ 1A

(b) 當 $f'(x) = 0$，$x = 0$ 或 -12。

x	$x < -12$	$-12 < x < -6$	$-6 < x < 0$	$x > 0$
$f'(x)$	+	−	−	+
$f''(x)$	−	−	+	+

(i) $x < -12$ 或 $x > 0$ 1A

(ii) $-12 < x < -6$ 或 $-6 < x < 0$ 1A

(iii) $x > -6$

(iv) $x < -6$ 1A

(c) 極大點為 $(-12,\ -25)$。 1A

極小點為 $(0,\ -1)$。 1A

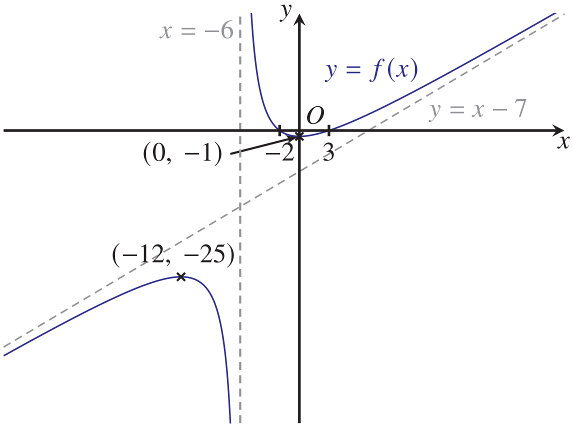
(d) 垂直漸近線為 $x = -6$。 1A

$f(x) = x - 7 + \dfrac{36}{x+6}$ 1M

斜漸近線為 $y = x - 7$。 1A

(e)（相對極值點及漸近線） 1A

（全部正確） 1A



34. (a) $f'(x) = \dfrac{(x-6)^2[(x+1)^2 + 2(x+1)(x+15)] - 2(x-6)(x+15)(x+1)^2}{(x-6)^4}$ 1M

$= \dfrac{(x+1)(x+8)(x-27)}{(x-6)^3}$ 1A

$f''(x) = \dfrac{686(x+3)}{(x-6)^4}$ 1A

(b) 當 $f'(x) = 0$，$x = -8$ 或 -1 或 27。

當 $f''(x) = 0$，$x = -3$

x	$x < -8$	$-8 < x < -3$	$-3 < x < -1$	$-1 < x < 6$	$6 < x < 27$	$x > 27$
$f'(x)$	+	−	−	+	−	+
$f''(x)$	−	−	+	+	+	+

(i) $x < -8$ 或 $-1 < x < 6$ 或 $x > 27$ 1A

(ii) $-3 < x < 6$ 或 $x > 6$ 1A

(c) 極小點為 $(-1,\ 0)$ 及 $\left(27,\ \dfrac{224}{3}\right)$。 1A+1A

極大點為 $\left(-8,\ \dfrac{7}{4}\right)$。 1A

拐點為 $\left(-3,\ \dfrac{16}{27}\right)$。 1A

(d) 垂直漸近線為 $x = 6$。 1A

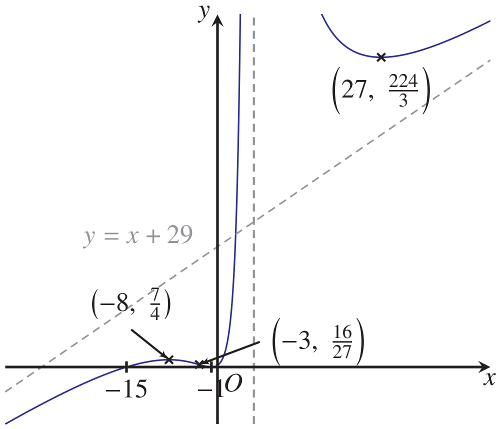
$f(x) = x + 29 + \dfrac{343x - 1029}{(x-6)^2}$ 1M

斜漸近線為 $y = x + 29$。 1A

(e)（極值點及拐點） 1A

（漸近線） 1A

（全部正確） 1A



35. (a) $f'(x) = \dfrac{-2(x-3)}{(x+3)^4}$ 1A

$f''(x) = \dfrac{6(x-5)}{(x+3)^5}$ 1A

(b) 當 $f(x) = 0$，$x = 1$。當 $f'(x) = 0$，$x = 3$。當 $f''(x) = 0$，$x = 5$。

x	$x < -3$	$-3 < x < 1$	$1 < x < 3$	$3 < x < 5$	$x > 5$
$f(x)$	+	−	+	+	+
$f'(x)$	+	+	+	−	−
$f''(x)$	+	−	−	−	+

(i) $x < -3$ 或 $x > 1$ 1A

(ii) $x < -3$ 或 $-3 < x < 3$ 1A

(iii) $x < -3$ 或 $x > 5$ 1A

(c) 極大點為 $\left(3, \dfrac{1}{108}\right)$ 1A

拐點為 $\left(5, \dfrac{1}{128}\right)$ 1A

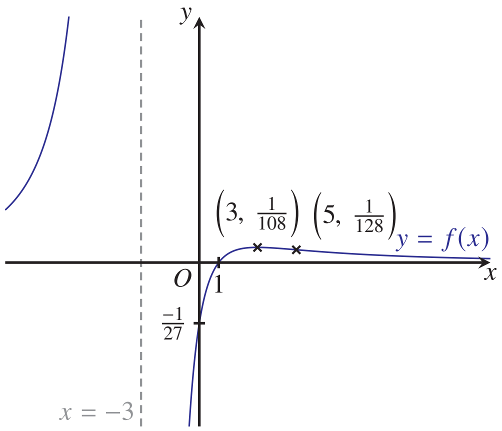
(d) 垂直漸近線為 $x = -3$。 1A

水平漸近線為 $y = 0$。 1A

(e)（極大點及拐點） 1M

（漸近線） 1A

（全部正確） 1A



(f) $n(k) = \begin{cases} 1 & 當 k \le 0 或 k > \dfrac{1}{108} \\ 2 & 當 k = \dfrac{1}{108} \\ 3 & 當 0 < k < \dfrac{1}{108} \end{cases}$ 1M+2A

– 試卷完 –