SUM-GOF-2425-ASM-SET 1-MATH
建議題解

多項選擇題

1. B	2. C	3. B	4. B	5. C
6. B	7. D	8. C	9. B	10. B
11. D	12. B	13. A	14. C	15. A
16. C	17. A	18. B	19. B	20. D
21. A	22. B	23. B	24. D	25. A
26. C	27. A	28. B	29. B	30. B

1. $\boxed{\text{B}}$

$y = f(x) \quad \longrightarrow \quad y = f(-x) \quad \longrightarrow \quad y = f(-2x)$
沿 y 軸反射。
沿 x 軸縮小至原來的 $\frac{1}{2}$ 倍。
答案為 B。

2. $\boxed{\text{C}}$

沿 x 軸放大至原來的 3 倍：
$y = \tan x \quad \longrightarrow \quad y = \tan \frac{x}{3}$
沿 y 軸縮小至原來的 $\frac{1}{2}$ 倍：
$y = \tan \frac{x}{3} \quad \longrightarrow \quad y = \frac{1}{2} \tan \frac{x}{3}$

3. $\boxed{\text{B}}$

I. ✓。$y = f(x-2)$ 的圖像在 $y = f(x)$ 的右方 2 單位，有可能為 $y = g(x)$。
II. ✓。$y = f(-x+2)$ 的圖像由 $y = f(x)$ 的圖像向左平移 2 單位 [至 $y = f(x+2)$]
然後沿 y 軸反射，亦有可能為 $y = g(x)$。
III. ✗。$y = f(-x-2)$ 由 $y = f(x)$ 的圖像向右平移 2 單位 [至 $y = f(x-2)$]
然後沿 y 軸反射。圖像的頂點應在 y 軸的左方。

4. $\boxed{\text{B}}$

該圖像通過 $(0,\ 1)$ 及 $(90,\ 0)$。
答案為 B。

5. $\boxed{\text{C}}$

A. ✓。$0 = -x^2 - 4x + 6$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4(-1)(6)}}{2(-1)}$$
$$= -2 \pm \sqrt{10}$$

x 截距為 $-2 \pm \sqrt{10}$，是無理數。

B. ✓。設 $(h,\ k)$ 為頂點的坐標。

$$h = -\frac{(-4)}{2(-1)} \quad 及 \quad k = -(-2)^2 - 4(-2) + 6$$
$$= -2 \qquad\qquad = 10$$

C. ✗。新的圖像的方程為

$$y = -(x+3)^2 - 4(x+3) + 6$$
$$y = -x^2 - 10x - 15$$

D. ✗。$8 = -x^2 - 4x + 6$

$$0 = -x^2 - 4x - 2$$
$$x \approx -341 \quad 或 \quad -586$$

該圖像與直線 $y = 8$ 相交於兩點。

6. $\boxed{\text{B}}$

I. ✓。當 $x = 0$ 時，$4 = p + q\tan 0° = p$。

II. ✗。$y = \tan x°$ 為一遞增曲線。由於此曲線同為遞增，$q > 0$。

III. ✓。當 $x = -\alpha$ 時，$0 = 4 + q\tan(-\alpha)° \Rightarrow \tan\alpha° = \frac{4}{q} > 0$

7. $\boxed{\text{D}}$

將變換分拆為兩個步驟。

$$y = 2^x \quad \longrightarrow \quad y = 2^x - 3 \quad \longrightarrow \quad y = 2^{x+1} - 3$$

向下平移 3 單位。
向左平移 1 單位。

8. $\boxed{\text{C}}$

$g(x) = -\frac{1}{2}f(x)$

將 $y = f(x)$ 的圖像沿 y 軸縮小至原來的 $\frac{1}{2}$ 倍，然後沿 x 軸反射得出 $y = g(x)$ 的圖像。
答案為 C。

9. $\boxed{\text{B}}$

設 $(h,\ k)$ 為 $y = f(x)$ 的圖像的頂點的坐標。

$$h = -\frac{-4a}{2(1)} = 2a \quad 及 \quad k = (2a)^2 - 4a(2a) + 5a^2 = a^2$$

考慮以下變換：

$$y = f(x) \quad \longrightarrow \quad y = f(x-1) \quad \longrightarrow \quad y = -f(x-1)$$

將 $y = f(x)$ 的圖像向右平移 1 單位；
然後沿 x 軸反射至 $y = -f(x-1)$ 的圖像。

I. ✗。該頂點的 y 坐標為 $-a^2$，不是正數。

II. ✓。

III. ✗。對稱軸的方程為

$$x = 2a + 1$$
$$x - 2a - 1 = 0$$

10. $\boxed{\text{B}}$

設 $(h,\ k)$ 為 $y = f(x)$ 的圖像的頂點的坐標。

$$h = -\frac{12a}{2(-3)} = 2a \quad 及 \quad k = -3(2a)^2 + 12a(2a) + (1 - 13a^2) = -a^2 + 1$$

考慮以下變換：

$$y = f(x) \quad \longrightarrow \quad y = f(-x) \quad \longrightarrow \quad y = \frac{1}{2}f(-x)$$

$y = f(x)$ 的圖像沿 y 軸反射；
然後沿 y 軸縮小至原來的 $\frac{1}{2}$ 倍至 $y = \frac{1}{2}f(-x)$ 的圖像。

I. ✗。頂點的 x 坐標為 $-2a$。

II. ✓。

III. ✗。對稱軸的方程為

$$x = -2a$$
$$x + 2a = 0$$

11. $\boxed{\text{D}}$

考慮以下變換：

$$y = f(x) \quad \longrightarrow \quad y = f(x+1) \quad \longrightarrow \quad y = -f(x+1)$$

幾何意義：

- 向左平移 1 單位。
- 沿 x 軸反射。

答案為 D。

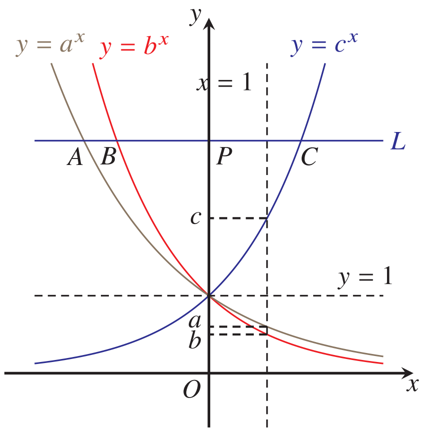
12. $\boxed{\text{B}}$

描繪直線 $x = 1$ 及 $y = 1$。
從圖中，$0 < b < a < 1 < c$。

I. ✓。從圖中，$0 < a < 1$ 及 $0 < b < 1$。故此，$ab < 1$。

II. ✗。$y = b^x$ 與 $y = c^x$ 的圖像沿 y 軸對稱。因此，$b^{-1} = c$。
可得 $ac > bc = 1$。

III. ✓。



13. $\boxed{\text{A}}$

由 $y = f(x)$ 至 $y = f(2x+1)$：
向左平移 1 單位 → 沿 x 軸縮小至原來的 $\frac{1}{2}$ 倍 ⇒ 選項 A
另一變換：
沿 x 軸縮小至原來的 $\frac{1}{2}$ 倍 → 向左平移 $\frac{1}{2}$ 單位 ⇒ 選項 A
另一解法：
留意 $f(0) = f(5) = 0$。
$g\left(-\frac{1}{2}\right) = f\left[2\left(-\frac{1}{2}\right)+1\right] = f(0) = 0$ 及 $g(2) = f[2(2)+1] = f(5) = 0$。
$y = g(x)$ 的圖像有 x 截距 $-\frac{1}{2}$ 及 5 ⇒ 選項 A。

14. $\boxed{\text{C}}$

$$y = f(x) \quad \longrightarrow \quad y = -f(x) \quad \longrightarrow \quad y = -f(x-2)$$
沿 x 軸反射。向右平移 2 單位。
答案為 C。

15. $\boxed{\text{A}}$

考慮以下變換：

$$y = f(x) \quad \longrightarrow \quad y = f(2x) \quad \longrightarrow \quad y = -f(2x)$$

幾何意義：

- 沿 x 軸縮小至原來的 $\frac{1}{2}$ 倍。
- 沿 x 軸反射。

答案為 A。

16. $\boxed{\text{C}}$

由 $y = f(x)$ 至 $y = g(x)$。
向左平移 4 單位及向下 3 單位。
故此，$g(x) = f(x+4) - 3$。

17. $\boxed{\text{A}}$

$y = -f(x-1)$ 的圖像由
$y = f(x)$ 的圖像向右平移 1 單位；
沿 x 軸反射而成。
只有選項 A 滿足此。

18. $\boxed{\text{B}}$

$$y = \frac{4}{x} \quad \longrightarrow \quad y = \frac{4}{x+4}$$

I. ✓。

II. ✗。當 $x = -3.5$ 時，$y = \dfrac{4}{-3.5+4} = 8$。

III. ✓。當 $x = 0$ 時，$y = \dfrac{4}{4} = 1$，只有一個 y 截距。

19. $\boxed{\text{B}}$

$y = f(x) \to y = f(-x)$：沿 y 軸反射
$y = f(-x) \to y = f(-x) - 5$：向下平移 5 單位

20. $\boxed{\text{D}}$

可得 $f(3) = 2$ 及 $g(3) = 1$。

A. ✗。$g(3) = -2f(3) + 2 = -2(2) + 2 = -2 \neq 1$

B. ✗。$g(3) = -2f(3) + 3 = -2(2) + 3 = -1 \neq 1$

C. ✗。$g(3) = -\frac{1}{2}f(3) + 3 = -1 + 3 = 2 \neq 1$

D. ✓。$g(3) = -\frac{1}{2}f(3) + 2 = -1 + 2 = 1$

21. $\boxed{\text{A}}$

留意 $f(2) = 1$ 對應 $g(5) = -1$。

A. ✓。$g(5) = f(2) - 2 = 1 - 2 = -1$

B. ✗。$g(5) = f(2) + 2 = 1 + 2 = 3 \neq -1$

C. ✗。$g(5) = f(8) - 2 = ?$

D. ✗。$g(5) = f(8) + 2 = ?$

22. $\boxed{\text{B}}$

由 $y = f(x)$ 開始，
沿 x 軸反射 $\rightarrow$ $y = -f(x)$
向左平移 2 單位 $\rightarrow$ $y = -f(x+2)$

23. $\boxed{\text{B}}$

從 $y = f(x)$ 的圖像至 $y = g(x)$ 的圖像。

- 沿 x 軸反射。
- 向下平移 3 單位。

涉及變換：

$$y = f(x) \longrightarrow y = -f(x) \longrightarrow y = -f(x) - 3$$

因此，可得 $g(x) = -f(x) - 3$。

24. $\boxed{\text{D}}$

設 $f(x) = (x-h)^2 + k$。結果的圖像為
$y = -f(x-h)$
$\quad = -(x-2h)^2 - k$

25. $\boxed{\text{A}}$

從 $y = f(x)$ 的圖像至 $y = g(x)$ 的圖像：

- 沿 x 軸縮小至原來的 $\frac{1}{2}$ 倍。
- 沿 y 軸放大至原來的 2 倍。

涉及變換：

$$y = f(x) \longrightarrow y = f(2x) \longrightarrow y = 2f(2x)$$

因此，$g(x) = 2f(2x)$。

26. $\boxed{\text{C}}$

圖中顯示 $y = f(x)$ 及 $y = -f(x-5)$ 的圖像。
$y = f(x)$ 的圖像沿 x 軸反射，然後向左平移 5 單位。

27. $\boxed{\text{A}}$

從 $y = f(x)$ 的圖像至 $y = g(x)$ 的圖像：

- 沿 x 軸放大至原來的 2 倍。

涉及變換：

$$y = f(x) \quad \longrightarrow \quad y = f\left(\frac{x}{2}\right)$$

可得對所有實數值 x，$g(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)$。
因此，$f(x) = g(2x)$。

28. $\boxed{\text{B}}$

從 $y = f(x)$ 的圖像至 $y = g(x)$ 的圖像：

- 沿 x 軸放大至原來的 4 倍。

涉及變換：

$$y = f(x) \quad \longrightarrow \quad y = f\left(\frac{x}{4}\right)$$

因此，可得 $g(x) = f\left(\frac{x}{4}\right)$。

29. $\boxed{\text{B}}$

考慮以下變換：

$$y = f(x) \quad \longrightarrow \quad y = f(-x) \quad \longrightarrow \quad y = f(-x) + 1$$

幾何意義：

- 沿 y 軸反射。
- 向上平移 1 單位。

答案為 B。

30. $\boxed{\text{B}}$

向上 2 單位 $\Rightarrow y = \log x + 2$
沿 y 軸放大至原來的 3 倍 $\Rightarrow y = 3(\log x + 2) = 3\log x + 6$