

DAYCP-AOT-2324-ASM-SET 1-MATH

建議題解

結構式試題

$$1. \quad (a) \quad BC^2 = 30^2 + 30^2 - 2(30)(30) \cos 40^\circ \quad 1M$$

$$BC \approx 20.5 \text{ cm} \quad 1A$$

(b) 由於 $\triangle ABC$ 為等邊三角形， $\triangle ABC$ 的外心與形心重合。

$$r = \frac{2}{3} \times BC \sin 60^\circ \quad 1M$$

$$\approx 11.8 \text{ cm} \quad 1A$$

$$(c) \text{ 所求之角} = \cos^{-1} \frac{r}{30} \quad 1M$$

$$\approx 66.7^\circ \quad 1A$$

2. (a) 設 K 為 EF 上的一點使得 $CK \perp EF$ 。

考慮 $\triangle CFK$ 。

$$\cos \angle CFK = \frac{\left(\frac{60-30}{2}\right)}{50}$$

$$\angle CFK \approx 72.5^\circ$$

$$\angle DCF = 180^\circ - \angle CFK \approx 107^\circ \quad 1A$$

考慮 $\triangle DCF$ 。

$$DF^2 = 30^2 + 50^2 - 2(30)(50) \cos \angle DCF$$

$$DF \approx 65.6 \text{ cm} \quad 1A$$

(b) 設 J 為 FH 上的一點使得 $CJ \perp FH$ 。

$$AC = \sqrt{30^2 + 30^2} = 30\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$HF = \sqrt{60^2 + 60^2} = 60\sqrt{2} \text{ cm}$$

考慮 $\triangle CFJ$ 。

$$CJ = \sqrt{50^2 - \left(\frac{HF - AC}{2}\right)^2} \quad 1M$$

$$= 5\sqrt{82} \text{ cm}$$

$$\text{該平截頭體的高為 } 5\sqrt{82} \text{ cm}。 \quad 1A$$

$$(c) \quad BD = AC = 30\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$BF = DF \approx 65.6 \text{ cm}$$

考慮 $\triangle BDF$ 。

$$\text{設 } s = \frac{BD + BF + DF}{2}。$$

$$\triangle BDF \text{ 的面積} = \sqrt{s(s - BD)(s - DF)(s - BF)} \quad 1M$$

$$\approx 1320 \text{ cm}^2$$

設 $h \text{ cm}$ 為所求距離。

考慮四面體 $CBDF$ 的體積。

$$\frac{1}{3}(\triangle BDF \text{ 的面積})(h) = \frac{1}{3} \left[\frac{(30)(30)}{2} \right] (5\sqrt{82}) \quad 1M$$

$$h \approx 15.5 \quad 1A$$

所求距離為 15.5 cm。

3. (a) $AC = \sqrt{78^2 + 104^2}$

$$= 130 \text{ cm}$$

$$AB = \sqrt{130^2 - 120^2} \quad 1M$$

$$= 50 \text{ cm} \quad 1A$$

$$\angle BAD = \tan^{-1} \frac{120}{50} + \tan^{-1} \frac{104}{78}$$

$$\approx 121^\circ$$

$$BD^2 = 50^2 + 78^2 - 2(50)(78) \cos \angle BAD \quad 1M$$

$$BD = 112 \text{ cm} \quad 1A$$

(b) (i) 留意 $GA = GB = GC = GD = \frac{AC}{2} = 65 \text{ cm}$ 。

$$VG = \sqrt{169^2 - 65^2}$$

$$= 156 \text{ cm} \quad 1A$$

(ii) 設 H 為 G 在平面 VBD 上的投影。

設 $h \text{ cm}$ 為所求距離。

考慮 $\triangle BDG$ 的面積。

$$\text{設 } s = \frac{65 + 65 + 112}{2} = 121 \text{ cm}。$$

$$\text{面積} = \sqrt{121(121 - 65)^2(121 - 112)} \quad 1M$$

$$= 1848 \text{ cm}^2$$

考慮 $\triangle VBD$ 的面積。

$$\text{設 } s = \frac{169 + 169 + 112}{2} = 225 \text{ cm}。$$

$$\text{面積} = \sqrt{225(225 - 169)^2(225 - 112)}$$

$$= 840\sqrt{113} \text{ cm}$$

考慮四面體 $VBGD$ 的體積。

$$\frac{1}{3}(1848)(156) = \frac{1}{3}(840\sqrt{113})(h) \quad 1M$$

$$h \approx 32.3 \quad 1A$$

所求距離為 32.3 cm。

4. (a) (i) $AC = \sqrt{3 + 1^2} = 2$

$$AK = \frac{1}{2}AC = 1 \quad 1A$$

$$\tan \angle BAC = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{KM}{1}$$

$$KM = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

1A

$$(ii) \tan \angle BAC = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\angle BAC = 30^\circ$$

1M

$$\text{所求距離} = \sqrt{3} \sin 30^\circ$$

1M

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}$$

1A

(b) (i) 設 E 為 B 至 AK 的垂足。則 $\alpha = \angle BED$ 。

1M

$$BD^2 = BE^2 + DE^2 - 2(BE)(DE) \cos \alpha$$

1M

$$= \frac{3}{4} + \frac{3}{4} - 2\left(\frac{3}{4}\right) \cos \alpha$$

$$= \frac{3}{2}(1 - \cos \alpha)$$

1A

$$(ii) MN^2 = KM^2 + KN^2 - 2(KM)(KN) \cos \alpha$$

$$MN^2 = \frac{2}{3}(1 - \cos \alpha)$$

1A

$$\frac{MN^2}{BD^2} = \frac{\frac{2}{3}(1 - \cos \alpha)}{\frac{3}{2}(1 - \cos \alpha)}$$

$$= \frac{4}{9}$$

1A

所求比例為 $2:3$ 。

1A

$$5. (a) \angle BAC = 180^\circ - 56^\circ - 82^\circ = 42^\circ$$

$$\frac{BC}{\sin 42^\circ} = \frac{20}{\sin 56^\circ}$$

1M

$$BC \approx 16.1 \text{ cm}$$

1A

$$(b) (i) 10^2 = BC^2 + 20^2 - 2(BC)(20) \cos \angle ABC$$

1M

$$\angle ABC \approx 29.8^\circ$$

1A

(ii) 設 E 為 BD 上的一點使得 $CE \perp BD$ 。

設 F 為 AB 上的一點使得 $EF \perp BD$ 。

所求之角為 $\angle CEF$ 。

1M

$$BF = BC \approx 16.1 \text{ cm}$$

$$CE = FE = BC \sin \frac{82^\circ}{2} \approx 10.6 \text{ cm}$$

$$CF^2 = BC^2 + BF^2 - 2(BC)(BF) \cos \angle ABC$$

1M

$$CF \approx 8.29 \text{ cm}$$

$$CF^2 = EF^2 + CE^2 - 2(EF)(CE) \cos \angle CEF$$

1M

$$\angle CEF \approx 46.1^\circ > 45^\circ$$

同意該宣稱。

1A

6. (a) 該紙卡沿 AC 對稱。
 故此， $\angle BAC = 60^\circ$ 及 $\angle ACB = 180^\circ - 60^\circ - 70^\circ = 50^\circ$ 。 1A
- $$\frac{AC}{\sin 70^\circ} = \frac{10}{\sin 50^\circ}$$
- 1M
- $$AC \approx 12.3 \text{ cm}$$
- 1A
- $$BC = \frac{10 \sin 60^\circ}{\sin 50^\circ} \approx 11.3 \text{ cm}$$
- 1A
 (b) (i)
- $AE = \sqrt{AB^2 - BE^2}$
- 及
- $CE^2 = \sqrt{BC^2 - BE^2}$
-
- $AC^2 = AE^2 + CE^2$
-
- $= BC^2 + AB^2 - 2BE^2$
- 1M
-
- $BE \approx 6.22 \text{ cm}$
- 1A
 (ii) 設
- $h \text{ cm}$
- 為所求距離。
-
- $AE = \sqrt{10^2 - BE^2} \approx 7.83 \text{ cm}$
- 及
- $CE = \sqrt{BC^2 - BE^2} \approx 9.44 \text{ cm}$
-
- $$\frac{1}{3} \times \frac{(AE)(DB)}{2} \times CE = \frac{1}{3} \times \frac{(AD)(AC) \sin 60^\circ}{2} \times h$$
- 1M+1M
-
- $h \approx 8.66$
- 1A
-
- 所求距離為
- 8.66 cm
- 。
7. (a) $AD = 20 \cos 50^\circ \approx 12.9 \text{ cm}$ 1A
 $DB = \sqrt{30^2 - (20 \sin 50^\circ)^2} \approx 25.8 \text{ cm}$ 1A
 (b) (i) $AB^2 = 20^2 + 30^2 - 2(20)(30) \cos 45^\circ$ 1M
 $AB \approx 21.2 \text{ cm}$ 1A
 (ii) 所求之角為 $\angle ADB$ 。
 $AB^2 = AD^2 + DB^2 - 2(AD)(DB) \cos \angle ADB$ 1M
 $\angle ADB \approx 55.1^\circ$ 1A
 (iii) $CD = 20 \sin 50^\circ \approx 15.3 \text{ cm}$
 四面體的體積 $= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} (AD)(DB) \sin \angle ADB (CD)$ 1M
 $\approx 695 \text{ cm}^3 > 650 \text{ cm}^3$
 不同意該宣稱。 1A
8. (a) $\frac{\sin \angle ABD}{19} = \frac{\sin 80^\circ}{30}$ 1M
 $\angle ABD \approx 38.6^\circ$ 或 141° (捨去) 1A
 (b) (i) $25^2 = 19^2 + 30^2 - 2(19)(30) \cos \angle CDA$ 1M
 $\angle CDA \approx 56.1^\circ$ 1A
 (ii) 設 E 為 BD 上的一點使得 $AE \perp BD$ 。
 設 F 為 CD 上的一點使得 $EF \perp BD$ 。
 所求之角為 $\angle AEF$ 。 1A
 $AE = 19 \sin 80^\circ \approx 18.7 \text{ cm}$ 1M

$$DE = 19 \cos 80^\circ \approx 3.30 \text{ cm}$$

$$\angle EDF = \angle ABD \approx 38.6^\circ$$

$$EF = DE \tan \angle EDF \approx 2.63 \text{ cm}$$

$$DF = \frac{DE}{\cos \angle EDF} \approx 4.22 \text{ cm}$$

$$AF^2 = DF^2 + 19^2 - 2(DF)(19) \cos \angle CDA$$

1M

$$AF \approx 17.0 \text{ cm}$$

在 $\triangle AEF$ 中，

$$AF^2 = AE^2 + EF^2 - 2(AE)(EF) \cos \angle AEF$$

$$\angle AEF \approx 46.6^\circ$$

1A

所求之角為 46.6° 。

9. (a) $VC = \sqrt{15^2 + 36^2}$

$$= 39 \text{ cm}$$

$$AC^2 = 39^2 + 12^2 - 2(39)(12) \cos 100^\circ$$

1M

$$AC \approx 42.7 \text{ cm}$$

1A

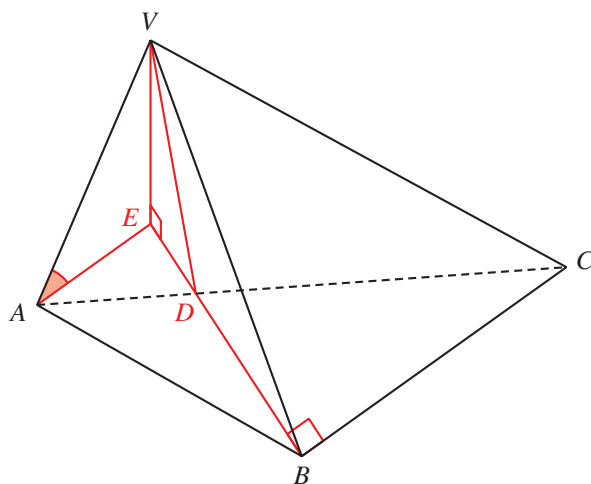
(b) 設 D 為 AC 上的點使得 $BD \perp BC$ 。

設 E 為直線 BD 上的點使得 $VE \perp BD$ 。

留意 $VA \perp AB$ 及 $AE \perp AB$ 。

所求之角為 $\angle VAE$ 。

1A



$$AB = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9 \text{ cm}$$

$$9^2 = AC^2 + 36^2 - 2(AC)(36) \cos \angle ACB$$

$$\angle ACB \approx 8.70^\circ$$

$$BD = 36 \tan \angle ACB \approx 5.51 \text{ cm}$$

1M

$$CD = \frac{36}{\cos \angle ACB} \approx 36.4 \text{ cm}$$

$$12^2 = 39^2 + AC^2 - 2(39)(AC) \cos \angle ACV$$

$$\angle ACV \approx 16.0^\circ$$

$$VD^2 = 39^2 + CD^2 - 2(39)(CD) \cos \angle ACV$$

$$VD \approx 10.8 \text{ cm}$$

$$VD^2 = 15^2 + BD^2 - 2(15)(BD) \cos \angle VBD$$

$$\angle VBD \approx 33.4^\circ$$

$$VE = 15 \sin \angle VBD \approx 8.26 \text{ cm}$$

1M

$$\sin \angle VAE = \frac{VE}{12}$$

$$\angle VAE \approx 43.5^\circ$$

同意該宣稱。

1A