REG-LOCUS-2324-ASM-SET 4-MATH

建議題解

結構式試題

1. (a) L_1 的斜率 $= \dfrac{2-0}{0-8} = -\dfrac{1}{4}$

L_2 的斜率 $= \dfrac{4-0}{0-16} = -\dfrac{1}{4}$

可得 $L_1 // L_2$。

因此，Γ 平行於 L_1。 1A

(b) (i) B 的坐標為 $(0,\ 3)$。

Γ 的方程為

$$\frac{y-3}{x-0} = -\frac{1}{4} \qquad \text{1M}$$

$$x + 4y - 12 = 0 \qquad \text{1A}$$

(ii) A 的坐標為 $(12,\ 0)$。

留意 $\angle AOB = 90°$。

AB 為 C 的一直徑。

C 的半徑

$= \dfrac{1}{2}\sqrt{(12-0)^2 + (0-3)^2}$ 1M

$= \dfrac{1}{2}\sqrt{153}$

C 的面積

$= \pi\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{153}\right)^2$ 1M

$= \dfrac{153\pi}{4}$ 1A

2. (a) D 的坐標為 $(-5,\ 4)$。

設 $(h,\ k)$ 為 E 的坐標。

將 P 的軌跡記為 Γ。

留意 $\Gamma \perp DE$。

$$\frac{-4}{3} \times \frac{k-4}{h+5} = -1 \qquad \text{1M}$$

$$3h - 4k + 31 = 0$$

DE 的中點在 Γ 上。

$$4\left(\frac{-5+h}{2}\right) + 3\left(\frac{4+k}{2}\right) - 17 = 0 \qquad \text{1M}$$

$$4h + 3k - 42 = 0$$

求解後，可得 $h = 3$ 及 $k = 10$。 1A

E 的坐標為 $(3,\ 10)$。

(b) C 的半徑

$= \sqrt{5^2 + 4^2 - 25}$ 1M

$= 4$

DE 的中點的坐標為 $(-1,\ 7)$。

由 DE 的中點至 C 的圓心的距離

$= \sqrt{(-1+5)^2 + (7-4)^2}$

$= 5 > 4$

P 至 D 的最短距離為 5，大於 C 的半徑。 1M

P 必定在 C 外。

同意該宣稱。 1A

3. (a) G 的坐標為 $(1,\ 6)$。

$AG = \sqrt{(1-19)^2 + (6-30)^2}$ 1M

$= 30$ 1A

(b) (i) Γ 為 AG 的垂直平分線。 1A

(ii) C 的半徑 $= \sqrt{1^2 + 6^2 + 252} = 17$ 1M

留意 $AM = AN = GM = GN = 17$。

$MN = 2\sqrt{17^2 - 15^2}$ 1M

$= 16$

$\triangle AMN$ 的周界

$= 17 + 17 + 16$ 1M

$= 50$ 1A

4. (a) $(x+1)^2 + (y-2)^2 = (5+1)^2 + (10-2)^2$ 1M

$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 100$ 1A

(b) (i) 留意 $(-11+1)^2 + (2-2)^2 = 100$。

Γ 通過 H。 1A

(ii) $AH = \sqrt{(-11-5)^2 + (2-10)^2} = \sqrt{320}$ 1A

(iii) 設 M 為 AH 的中點。

$\triangle AHK$ 的面積在當 $MK \perp AH$ 及 $\angle HAK < 90°$ 時達至其最大值。

$BM = \sqrt{10^2 - \left(\frac{\sqrt{320}}{2}\right)^2} = \sqrt{20}$ 1M

所求面積

$= \frac{(\sqrt{320})(\sqrt{20}+10)}{2}$ 1M

≈ 129

< 130

同意該宣稱。 1A

5. (a) $(x-7)^2 + (y+4)^2 = (14-7)^2 + (-28+4)^2$ 1M

$(x-7)^2 + (y+4)^2 = 625$ 1A

(b) (i) Γ 為 GH 的垂直平分線。 1A

(ii) 設 M 為 GH 的中點。

M 的坐標為 $(-2,\ 8)$。

$GM = \sqrt{(7+2)^2 + (-4-8)^2} = 15 < 25$ 1M

M 在 C_1 內。

因此，Γ 與 C_1 相交於兩相異點。 1

(c) 設 r_2 為 C_2 的半徑。

$$\begin{aligned} GH &= 25 + r_2 \\ 2(15) &= 25 + r_2 \\ r_2 &= 5 \end{aligned}$$

可得 $GQ = GH + r_2 = 35$。 1M

$AB = 2\sqrt{25^2 - 15^2} = 40$ 1M

留意 $AGBQ$ 為鷂形。

所求面積

$= \dfrac{(40)(35)}{2}$

$= 700$ 1A

6. (a) P 至 AB 的垂直距離 $= \dfrac{20 \times 2}{5} = 8$ 1M

P 的軌跡為一對平行於 AB 的直線，與 AB 維持距離 8。

設 θ 為 AB 的傾角。

$\tan\theta = \dfrac{6-3}{4-0} = \dfrac{3}{4}$。故此，$\cos\theta = \dfrac{4}{\sqrt{3^2+4^2}} = \dfrac{4}{5}$。

設 c 為 Γ 的 y 截距。

$$\frac{4}{5} = \frac{8}{\pm(c-3)}$$ 1M

$c = -7$ 或 13

Γ 的方程為 $y = \dfrac{3}{4}x - 7$ 或 $y = \dfrac{3}{4}x + 13$。 1A

(b) P 至 AB 的垂直距離 $= 8 > 5$

故此不可能使 $AP = AB$ 或 $BP = AB$。

當 $AP = BP$，P 在 AB 的垂直平分線上。

AB 的垂直平分線的方程為

$$\begin{aligned} y - \frac{9}{2} &= -\frac{4}{3}(x-2) \\ y &= -\frac{4}{3}x + \frac{43}{6} \end{aligned}$$ 1M

解 $\begin{cases} y = -\dfrac{4}{3}x + \dfrac{43}{6} \\ y = \dfrac{3}{4}x - 7 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} y = -\dfrac{4}{3}x + \dfrac{43}{6} \\ y = \dfrac{3}{4}x + 13 \end{cases}$，

P 的坐標為 $\left(\dfrac{34}{5},\ -\dfrac{19}{10}\right)$ 或 $\left(-\dfrac{14}{5},\ \dfrac{109}{10}\right)$。 1A+1A

7. (a) G 的坐標為 $(4,\ 10)$。 1M

所求方程為

$$(x-4)^2+(y-10)^2=(14-4)^2+(20-10)^2 \qquad \text{1M}$$

$$(x-4)^2+(y-10)^2=200 \qquad \text{1A}$$

(b) L_1 的方程為

$$\frac{y-0}{x+6}=\frac{20-0}{14+6} \qquad \text{1M}$$

$$y=x+6$$

圍成的區域的三個頂點的坐標為 $(0,\ 6)$、$(0,\ k)$ 及 $(k-6,\ k)$。 1M

$$\frac{(k-6)(k-6-0)}{2}=200$$

$$k-6=\pm 20$$

$$k=26 \quad 或 \quad -14（捨去） \qquad \text{1A}$$

(c) $$\sqrt{(x-4)^2+(y-10)^2}=\sqrt{(y-26)^2} \qquad \text{1M+1M}$$

$$x^2+y^2-8x-20y+116=y^2-52y+676 \qquad \text{1M}$$

$$x^2-8x+32y-560=0 \qquad \text{1A}$$