REV-LOCUS-2324-ASM-SET 2-MATH
建議題解

結構式試題

1. (a) $\angle CAB = \angle BAD$ （公共角）

$\angle ABC = \angle ADB$ （交錯弓形的圓周角）

$\triangle ABC \sim \triangle ADB$ （AA）

評分標準		
情況 1	附有正確理由的任何正確證明。	2
情況 2	未附有正確理由的任何正確證明。	1

(b) (i) $$\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{AD}$$ 1M

$$\frac{\sqrt{9^2 + 12^2}}{36 + 9} = \frac{36 + 9}{\sqrt{9^2 + 12^2} + CD}$$

$$CD = 120$$

Γ 的半徑為 60。

留意 $\angle EBA = 90°$。

E 的坐標為 $(60,\ 36)$。 1M

所求方程為

$$(x - 60)^2 + (y - 36)^2 = 60^2$$

$$(x - 60)^2 + (y - 36)^2 = 3600$$ 1A

(ii) E 為 CD 的中點。

D 的坐標為 $(108,\ 72)$。 1A

設 $x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$ 為 $\triangle BED$ 的外接圓的方程。

$$\begin{cases} 0^2 + 36^2 + 0 + 36e + f = 0 \\ 60^2 + 36^2 + 60d + 36e + f = 0 \\ 108^2 + 72^2 + 108d + 72e + f = 0 \end{cases}$$ 1M

求解後，可得 $d = -60$、$e = -252$ 及 $f = 7776$。

所求方程為 $x^2 + y^2 - 60x - 252y + 7776 = 0$。 1A

E 為 CD 的中點。

D 的坐標為 $(108,\ 72)$。 1A

留意該外接圓的圓心在 BE 的垂直平分線上，即 $x = 30$。

設 $\triangle BED$ 的外接圓的圓心的坐標為 $(30,\ k)$。

$$\sqrt{(30 - 0)^2 + (k - 36)^2} = \sqrt{(30 - 108)^2 + (k - 72)^2}$$ 1M

$$k^2 - 72k + 2196 = k^2 - 144k + 11\,268$$

$$k = 126$$

所求方程為

$$(x-30)^2+(y-126)^2=(0-30)^2+(36-126)^2$$

$$(x-30)^2+(y-126)^2=9000 \qquad \text{1A}$$

(iii) $\triangle BED$ 的外接圓的面積

$=(\sqrt{30^2+126^2-7776})^2\pi$ 1M

$\approx 28\,300$

設 r 為 $\triangle BED$ 的內切圓的半徑。

考慮 $\triangle BED$ 的面積。

$$\frac{(36+9)(108)}{2}=\frac{(AB)(r)}{2}+\frac{(BD)(r)}{2}+\frac{(AD)(r)}{2} \qquad \text{1M}$$

$$r\approx 16.5$$

($\triangle BED$ 的內切圓的面積) $\times 30$

$=\pi r^2\times 30$

$\approx 25\,800$

$<\triangle BED$ 的外接圓的面積

同意該宣稱。 1

2. (a) P 至 AB 的垂直距離 $=\dfrac{20\times 2}{5}=8$ 1M

P 的軌跡為一對平行於 AB 的直線，與 AB 維持距離 8。

設 θ 為 AB 的傾角。

$\tan\theta=\dfrac{6-3}{4-0}=\dfrac{3}{4}$。故此，$\cos\theta=\dfrac{4}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{4}{5}$。

設 c 為 Γ 的 y 截距。

$$\frac{4}{5}=\frac{8}{\pm(c-3)} \qquad \text{1M}$$

$$c=-7 \quad 或 \quad 13$$

Γ 的方程為 $y=\dfrac{3}{4}x-7$ 或 $y=\dfrac{3}{4}x+13$。 1A

(b) P 至 AB 的垂直距離 $=8>5$

故此不可能使 $AP=AB$ 或 $BP=AB$。

當 $AP=BP$，P 在 AB 的垂直平分線上。

AB 的垂直平分線的方程為

$$y-\frac{9}{2}=-\frac{4}{3}(x-2) \qquad \text{1M}$$

$$y=-\frac{4}{3}x+\frac{43}{6}$$

解 $\begin{cases} y=-\dfrac{4}{3}x+\dfrac{43}{6} \\ y=\dfrac{3}{4}x-7 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} y=-\dfrac{4}{3}x+\dfrac{43}{6} \\ y=\dfrac{3}{4}x+13 \end{cases}$，

P 的坐標為 $\left(\dfrac{34}{5},-\dfrac{19}{10}\right)$ 或 $\left(-\dfrac{14}{5},\dfrac{109}{10}\right)$。 1A+1A

3. (a) (i) Γ 為 EF 的垂直平分線。 1A

(ii) 設 (x, y) 為 P 的坐標。

$$\sqrt{(x-8)^2+(y+20)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y-4)^2} \quad \text{1M}$$

$$x^2+y^2-16x+40y+464=x^2+y^2-4x-8y+20$$

$$x-4y-37=0 \quad \text{1A}$$

(b) (i) 設 (a, b) 為 H 的坐標。

$$\begin{cases} a-4b-37=0 \\ \dfrac{9-4}{5-2}\times\dfrac{b-4}{a-2}=-1 \end{cases} \quad \text{1M}$$

$$\frac{5}{3}\times\frac{b-4}{(4b+37)-2}=-1 \quad \text{1M}$$

$$b=-5$$

H 的坐標為 $(17, -5)$。 1A

(ii) C 的圓心為 GH 的中點。

圓心的坐標為 $(11, 2)$。 1A

半徑 $=\dfrac{GH}{2}=\dfrac{\sqrt{(17-5)^2+(9+5)^2}}{2}=\sqrt{85}$

E 至 C 的圓心的距離

$=\sqrt{(11-8)^2+(2+20)^2}$ 1M

$=\sqrt{493}$

$>\sqrt{85}$

E 在 C 外。。

同意該宣稱。 1A

4. (a) $\sqrt{(h-6)^2+(9-3)^2}=\sqrt{(h-a)^2+(11-3)^2}$ 1M

$$h^2-12h+72=h^2+a^2-2ah+64$$

$$h=\frac{a^2-8}{2a-12}$$

G 的坐標為 $\left(\frac{a^2-8}{2a-12},\ 3\right)$。 1A

(b) (i) $\frac{11-3}{a-\frac{a^2-8}{2a-12}}=\frac{4}{3}$ 1M

$$24(2a-12)=4[a(2a-12)-(a^2-8)]$$

$$0=4a^2-96a+320$$

$$a=4\quad 或\quad 20$$

當 $a=4$ 時，$h=-2<0$；當 $a=20$ 時，$h=14>0$。

故此，$a=20$。 1A

(ii) G 的坐標為 $(14,\ 3)$。C 的方程為

$$(x-14)^2+(y-3)^2=(6-14)^2+(9-3)^2$$ 1M

$$x^2+y^2-28x-6y+105=0$$

$$x^2+(kx)^2-28x-6kx+105=0$$ 1M

$$(1+k^2)x^2+(-28-6k)x+105=0$$

M 的 x 坐標 $=\frac{1}{2}\times\frac{28+6k}{1+k^2}$

$=\frac{14+3k}{1+k^2}$ 1

(iii) 由於 $\angle OMG = 90°$，$OM = 2\sqrt{41}$。

$$\sqrt{\left(\frac{14+3k}{1+k^2}\right)^2 + \left(\frac{k(14+3k)}{1+k^2}\right)^2} = 2\sqrt{41} \qquad \text{1M}$$

$$\frac{(14+3k)^2}{1+k^2} = 164$$

$$-155k^2 + 84k + 32 = 0$$

$$k = \frac{4}{5} \quad 或 \quad -\frac{8}{31}（捨去）$$

M 的坐標為 $(10,\ 8)$。 1M

M、G、A 共線。

B 的坐標為 $(4,\ 3)$。 1M

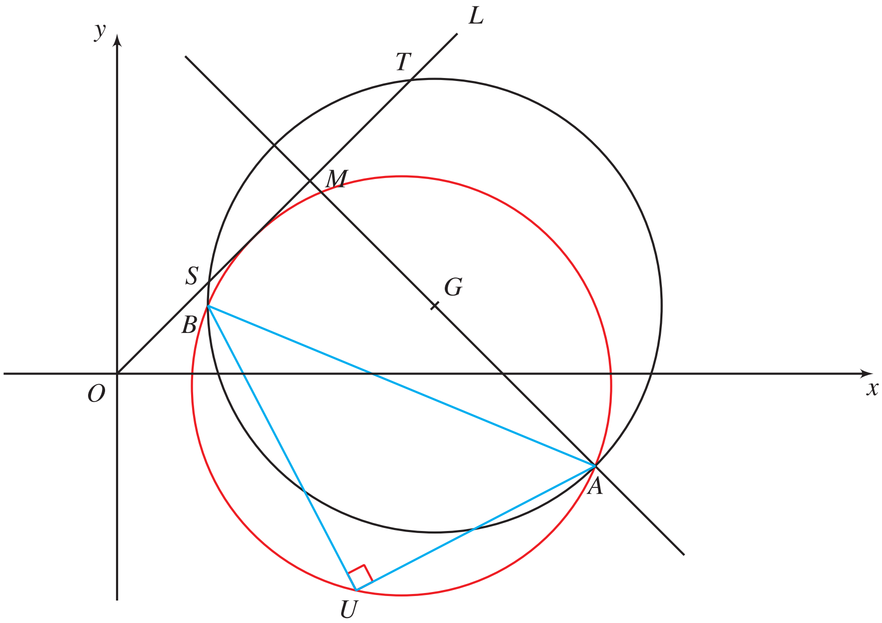
當圓 AUB 的面積為最小時，$\angle AUB = 90°$。 1M

AM 的斜率 × BM 的斜率 $= \dfrac{8-3}{10-14} \times \dfrac{8-3}{10-4}$ 1M

$= -\dfrac{25}{24} \neq -1$

故此，$\angle AMB \neq 90°$ 及 $\angle AUB + \angle AMB \neq 180°$。

A、M、B、U 不共圓。 1A



5. (a) 設 G 的坐標為 $(h,\ 26)$。

留意 G 在 AB 的垂直平分線上。

$$h = \frac{5 + 13}{2} \quad \text{1M}$$

$$= 9$$

C 的方程為

$$(x - 9)^2 + (y - 26)^2 = (5 - 9)^2 + (23 - 26)^2 \quad \text{1M}$$

$$(x - 9)^2 + (y - 26)^2 = 25 \quad \text{1A}$$

(b) $\sqrt{(k - 9)^2 + (38 - 26)^2} = 15$ 1M

$$k^2 - 18k = 0$$

$k = 18$ 或 0（捨去） 1A

(c) (i) T、P 與 G 共線。 1A

(ii) C 的半徑為 5。

所求之比 $= GP : PT$ 1M

$= 5 : (15 - 5)$

$= 1 : 2$ 1A

6. (a) (i) $x^2 + (mx)^2 - 400x - 300mx + 40\,000 = 0$ 1M

$(1 + m^2)x^2 - (300m + 400)x + 40\,000 = 0$

$\Delta = (300m + 400)^2 - 4(1 + m^2)(40\,000) > 0$ 1M

$10\,000(-7m^2 + 24m) > 0$

$0 < m < \dfrac{24}{7}$ 1A

(ii) M 的 $x = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{300m + 400}{1 + m^2}\right]$

$= \dfrac{50(3m + 4)}{1 + m^2}$

M 的 $y = m \cdot \dfrac{50(3m + 4)}{1 + m^2}$

$= \dfrac{50m(3m + 4)}{1 + m^2}$ 1

(b) (i) AB 的垂直平分線為通過 O 及 C 的圓心的直線。 1M

C 的圓心的坐標為 $(200,\ 150)$。

所求方程為

$$y - 0 = \frac{150 - 0}{200 - 0}(x - 0)$$

$3x - 4y = 0$ 1A

(ii) 留意當 $m = 0$ 或 $\dfrac{24}{7}$ 時，L 與 C 相切。

當 $m = 0$，L 與 C 的交點的坐標為 $(200,\ 0)$。

B 的坐標為 $(200,\ 0)$。 1A

當 $m = \dfrac{24}{7}$ 時，可得 A 的坐標為 $(56,\ 192)$。

將 C 的圓心記為 $G\,(200,\ 150)$。

假定 G 與 M 為相異點。

留意 $\angle GMO = 90°$ 及 $\angle OBG = 90°$。

可得 O、B、G、M 共圓。 1M

由於 $\angle OAG = 90°$ 及 $\angle GMO = 90°$，可得 O、A、G、M 共圓。

因此，O、A、M、G、B 共圓。

若 G 與 M 重合，O、A、G、B 同為共圓。

留意 OG 為該圓的直徑。

所求之圓的圓心為 $(100,\ 75)$。 1M

所求方程為

$$(x - 100)^2 + (y - 75)^2 = (0 - 100)^2 + (0 - 75)^2$$

$(x - 100)^2 + (y - 75)^2 = 15\,625$ 1A

(iii) 將圓 AMB 的圓心記為 D。

$$\tan\angle BOG = \frac{150}{200}$$
$$\angle BOG \approx 36.9°$$

$\angle ADB = 2\angle AOB = 2(2\angle BOG) \approx 147°$ 1M

Γ 的長度 $\leq 2\pi(125) \times \dfrac{\angle ADB}{360°}$ 1M

$\approx 322 < 330$

不同意該宣稱。 1A

7. (a) 設 S 的坐標為 $(x,\ y)$。

$$\sqrt{(x-18)^2+(y+70)^2} = \sqrt{(x+60)^2+(y+96)^2}$$ 1M

$$x^2+y^2-36x+140y+5224 = x^2+y^2+120x+192y+12\,816$$
$$-156x-52y-7592 = 0$$
$$3x+y+146 = 0$$ 1

可得 S 在 $3x+y+146=0$ 上。

(b) (i) $130 = \sqrt{(x-18)^2+(y+70)^2}$

$16\,900 = (x-18)^2+(-3x-146+70)^2$ 1M

$0 = 10x^2+420x-10\,800$

$x = -60$ 或 18（捨去）

S 的坐標為 $(-60,\ 34)$。 1A

(ii) T 的坐標為 $(0,\ -70)$。 1A

留意 Q、S 及 U 共線及 $QS : SU = 130 : 60 = 13 : 6$。

設 U 的坐標為 $(a,\ b)$。

$\dfrac{a+60}{-60-18} = \dfrac{6}{13}$ 及 $\dfrac{b-34}{34+70} = \dfrac{6}{13}$ 1M

$a = -96$ $b = 82$

RT 的斜率 $= \dfrac{-70+96}{0+60} = \dfrac{13}{30}$ 1M

TU 的斜率 $= \dfrac{82+70}{-96-0} = -\dfrac{19}{12}$

RU 的斜率 $= \dfrac{82+96}{-96+60} = -\dfrac{89}{18}$

由於沒有兩個斜率的積為 -1，$\triangle RTU$ 中沒有直角。

不同意該宣稱。 1A

8. (a) L_1 的斜率 $= \dfrac{6-0}{4-0} = \dfrac{3}{2}$ 1A

L_2 的斜率 $= -\dfrac{2}{3}$

所求方程為

$$y - 6 = -\frac{2}{3}(x-4) \quad \text{1M}$$

$$2x + 3y - 26 = 0 \quad \text{1A}$$

(b) (i) Γ 平行於 L_1。 1A

(ii) N 的坐標為 $(13,\ 0)$。 1A

所求方程為

$$\sqrt{(x-4)^2 + (y-6)^2} = \sqrt{(x-13)^2 + (y-0)^2} \quad \text{1M}$$

$$x^2 + y^2 - 8x - 12y + 52 = x^2 + y^2 - 26x + 169 \quad \text{1A}$$

$$18x - 12y - 117 = 0$$

$$6x - 4y - 39 = 0 \quad \text{1A}$$

9. (a) $(x-7)^2 + (y+2)^2 = (4-7)^2 + (2+2)^2$ 1M

$(x-7)^2 + (y+2)^2 = 25$ 1A

(b) $GF = \sqrt{(7-2)^2 + (-2-10)^2} = 13$

C 的半徑 $= 5 < FG$ 1M

因此，F 在 C 外。 1A

(c) (i) Γ 為 GF 的垂直平分線。 1A

(ii) FG 的中點的坐標為 $\left(\dfrac{9}{2},\ 4\right)$。

所求距離 $= \sqrt{\left(\dfrac{9}{2} - 7\right)^2 + (4+2)^2} - 5$ 1M

$= \dfrac{3}{2}$ 1A

10. (a) $(x-2)^2+(y-6)^2=r^2$ 1A

(b) (i) 設 G 為 C' 的圓心，則 $G(-2,\ 6-c)$。 1A

由於 $AG \perp PQ$，

$$\frac{6-c-6}{-2-2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$$ 1M

$$c=8$$ 1A

(ii) AG 的中點在 PQ 上，即 $(0,\ 2)$ 在 PQ 上。 1M

PQ 的方程為 $y=-\dfrac{x}{2}+2$。 1A

(iii) $(x-2)^2+\left(-\dfrac{x}{2}+2-6\right)^2=r^2$ 1M

$$\frac{5}{4}x^2+20-r^2=0$$

a 及 d 為該方程的根。

故此，$a+d=0$ 及 $ad=\dfrac{4(20-r^2)}{5}$。 1M

$$(a-d)^2=(a+d)^2-4ad$$

$$=\frac{16(r^2-20)}{5}$$ 1A

(c) $PQ^2=(a-d)^2+\left[\left(-\dfrac{a}{2}+2\right)-\left(-\dfrac{d}{2}+2\right)\right]^2$

$$80=\frac{5}{4}(a-d)^2$$

$$=4(r^2-20)$$ 1M

$$r^2=40$$

$$r=2\sqrt{10}\quad\text{或}\quad -2\sqrt{10}\text{（捨去）}$$

$AB=\sqrt{(2+1)^2+(6-1)^2}=\sqrt{34}<r$

故此，B 在 C 內。

同意該宣稱。 1A