建議題解

結構式試題

1. (a) $DE^2 + BE^2 = (AE^2 + AD^2) + BE^2$ （畢氏定理）

$= (AE^2 + BE^2) + AD^2$

$= AB^2 + AD^2$ （畢氏定理）

$= BD^2$ （畢氏定理）

Therefore, $\angle BED = 90°$ （畢氏定理的逆定理）

因此，$DE \perp BC$。

評分標準		
情況 1	附有正確理由的任何正確證明。	2
情況 2	未附有正確理由的任何正確證明。	1

(b) 在 $\triangle ABC$ 中，

$BC^2 = 3^2 + 2^2 - 2(3)(2)\cos 60°$ 1M

$BC = \sqrt{7}$ m

$\dfrac{\sqrt{7}}{\sin 60°} = \dfrac{2}{\sin \angle ABC}$ 1M

$\angle ABC \approx 40.9°$ 或 $139°$（捨去）

$AE = 3\sin \angle ABC$

$\approx 1.963\,961\,012$ m 1A

在 $\triangle ADE$ 中，

$\tan \angle AED = \dfrac{1}{AE}$

$\angle AED \approx 27.0°$ 1A

所求之角為 $27.0°$。

(c) (i) 由於 $AF \geq AE$，可得 1M

$\dfrac{AD}{AF} \leq \dfrac{AD}{AE}$

$\tan \angle AFD \leq \tan \angle AED$ 1M

$\angle AFD \leq \angle AED$ 1

(ii) 由於 $AB > AC$，當 F 在 B 時，$\angle AFD$ 最小。 1A

$\tan \angle ABD = \dfrac{1}{3}$ 1M

$\angle ABD \approx 18.4°$

$\angle AFD$ 的最小可取值為 $18.4°$。 1A

2. (a) $\dfrac{\sin \angle ABD}{19} = \dfrac{\sin 80°}{30}$ 1M

$\angle ABD \approx 38.6°$ 或 $141°$（捨去） 1A

(b) (i) $25^2 = 19^2 + 30^2 - 2(19)(30)\cos \angle CDA$ 1M

$\angle CDA \approx 56.1°$ 1A

(ii) 設 E 為 BD 上的一點使得 $AE \perp BD$。

設 F 為 CD 上的一點使得 $EF \perp BD$。

所求之角為 $\angle AEF$。 1A

$AE = 19 \sin 80° \approx 18.7\text{ cm}$ 1M

$DE = 19 \cos 80° \approx 3.30\text{ cm}$

$\angle EDF = \angle ABD \approx 38.6°$

$EF = DE \tan EDF \approx 2.63\text{ cm}$

$DF = \dfrac{DE}{\cos \angle EDF} \approx 4.22\text{ cm}$

$AF^2 = DF^2 + 19^2 - 2(DF)(19)\cos \angle CDA$ 1M

$AF \approx 17.0\text{ cm}$

在 $\triangle AEF$ 中，

$$AF^2 = AE^2 + EF^2 - 2(AE)(EF)\cos \angle AEF$$

$\angle AEF \approx 46.6°$ 1A

所求之角為 $46.6°$。

3. (a) $AD = 20 \cos 50° \approx 12.9\text{ cm}$ 1A

$DB = \sqrt{30^2 - (20 \sin 50°)^2} \approx 25.8\text{ cm}$ 1A

(b) (i) $AB^2 = 20^2 + 30^2 - 2(20)(30)\cos 45°$ 1M

$AB \approx 21.2\text{ cm}$ 1A

(ii) 所求之角為 $\angle ADB$。

$$AB^2 = AD^2 + DB^2 - 2(AD)(DB)\cos \angle ADB$$ 1M

$\angle ADB \approx 55.1°$ 1A

(iii) $CD = 20 \sin 50° \approx 15.3\text{ cm}$

四面體的體積 $= \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{2}(AD)(DB)\sin \angle ADB(CD)$ 1M

$\approx 695\text{ cm}^3 > 650\text{ cm}^3$

不同意該宣稱。 1A

4. (a) $PS^2 = 24^2 + 18^2 - 2(24)(18)\cos 50°$ 1M

$PS \approx 18.6\text{ cm}$ 1A

(b) 設 M 為 QR 的中點。所求之角為 $\angle SMP$。 1M

$SM = \sqrt{18^2 - \left(\dfrac{20}{2}\right)^2} = 4\sqrt{14}\text{ cm}$ 1M

$PM = \sqrt{24^2 - 10^2} = 2\sqrt{119}\text{ cm}$

$PS^2 = SM^2 + PM^2 - 2(SM)(PM)\cos\angle SMP$ 1M

$\angle SMP \approx 57.0°$ 1A

(c) $\angle PAS = \cos^{-1}\dfrac{AP^2 + AS^2 - SP^2}{2(AP)(AS)}$

利用圖的對稱性質，在當 A 在 QR 的中點時，使得 AP 及 AS 均垂直於 QR 且為最短，而此時 $\angle PAS$ 為最大。

當 A 由 Q 移動至中點 M，$\angle PAS$ 由 50° 增加至 57.0°。 1A

當 A 由中點 M 移動至 R，$\angle PAS$ 由 57.0° 減小至 50°。 1A

5. (a) $\angle ACB = 180° - 60° - 51° = 69°$

$\dfrac{BC}{\sin 51°} = \dfrac{20}{\sin 69°}$ 1M

$BC \approx 16.6\text{ cm}$ 1A

(b) 在 $\triangle BCD$，$BD = \sqrt{23^2 + BC^2} \approx 28.4\text{ cm}$。

在 $\triangle ABD$，

$13^2 = 20^2 + BD^2 - 2(20)(BD)\cos\angle ABD$ 1M

$\angle ABD \approx 24.0°$ 1A

(c) 設 E 為 BC 上的一點使得 $AE \perp BC$。

設 F 為 BD 上的一點使得 $EF \perp BC$。

所求之角為 $\angle AEF$。 1A

在 $\triangle ABC$，$AE = 20\sin 60° = 10\sqrt{3}\text{ cm}$ 及 $BE = 20\cos 60° = 10\text{ cm}$。

在 $\triangle BCD$，

$\dfrac{EF}{23} = \dfrac{10}{BC}$ 及 $\dfrac{BF}{BD} = \dfrac{10}{BC}$ 1M

$EF \approx 13.8\text{ cm}$ $BF \approx 17.1\text{ cm}$

在 $\triangle ABD$，

$AF^2 = 20^2 + BF^2 - 2(20)(BF)\cos\angle ABD$

$AF \approx 8.24\text{ cm}$

在 $\triangle AEF$，

$AF^2 = AE^2 + EF^2 - 2(AE)(EF)\cos\angle AEF$ 1M

$\angle AEF \approx 27.9°$ 1A

(d) 設 G 為地面上的一點使得 DG 為鉛垂直線。

$BD\sin 15° = CD\sin\angle DCG$ 1M

$\angle DCG \approx 18.6°$

由 A 至水平地面的距離

$= AE\sin(\angle AEF + \angle DCG)$ 1M

$\approx 12.7\text{ cm} < 13\text{ cm}$ 1A

同意該宣稱。 1A