

REV-AOT-2324-ASM-SET 2-MATH

建議題解

結構式試題

1. (a) 在 $\triangle VBC$,

$$\begin{aligned} VD &= 1.2 \sin 60^\circ \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{5} \text{ m} \end{aligned}$$

在 $\triangle ABC$,

$$\begin{aligned} AD &= 1.2 \sin 60^\circ \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{5} \text{ m} \end{aligned}$$

在 $\triangle VAD$,

$$1.2^2 = \left(\frac{3\sqrt{3}}{5}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{5}\right)^2 - 2\left(\frac{3\sqrt{3}}{5}\right)^2 \cos \angle VDA \quad 1\text{M}$$

$$\angle VDA \approx 70.52877937^\circ$$

在 $\triangle VGD$,

$$\begin{aligned} VG &= \frac{3\sqrt{3}}{5} \sin \angle VDA \quad 1\text{M} \\ &\approx 0.980 \text{ m} \quad 1\text{A} \end{aligned}$$

- (b) 所求之角等於 VBC 與 ABC 之間的交角，即 $\angle VDA$ 。 1M+1A
 所求之角為 70.5° 。 1A

2. (a) 該紙卡沿 AC 對稱。

故此， $\angle BAC = 60^\circ$ 及 $\angle ACB = 180^\circ - 60^\circ - 70^\circ = 50^\circ$ 。 1A

$$\begin{aligned} \frac{AC}{\sin 70^\circ} &= \frac{10}{\sin 50^\circ} \quad 1\text{M} \\ AC &\approx 12.3 \text{ cm} \quad 1\text{A} \end{aligned}$$

$$BC = \frac{10 \sin 60^\circ}{\sin 50^\circ} \approx 11.3 \text{ cm} \quad 1\text{A}$$

- (b) (i) $AE = \sqrt{AB^2 - BE^2}$ 及 $CE^2 = \sqrt{BC^2 - BE^2}$
 $AC^2 = AE^2 + CE^2$
 $= BC^2 + AB^2 - 2BE^2 \quad 1\text{M}$
 $BE \approx 6.22 \text{ cm} \quad 1\text{A}$

- (ii) 設 $h \text{ cm}$ 為所求距離。

$$\begin{aligned} AE &= \sqrt{10^2 - BE^2} \approx 7.83 \text{ cm} \text{ 及 } CE = \sqrt{BC^2 - BE^2} \approx 9.4 \text{ cm} \\ \frac{1}{3} \times \frac{(AE)(DB)}{2} \times CE &= \frac{1}{3} \times \frac{(AD)(AC) \sin 60^\circ}{2} \times h \quad 1\text{M}+1\text{M} \\ h &\approx 8.66 \quad 1\text{A} \end{aligned}$$

所求距離為 8.66 cm 。

3. (a) $AC^2 = 8^2 + 12^2 - 2(8)(12) \cos 100^\circ$ 1M

$AC \approx 15.5 \text{ cm}$ 1A

(b) (i) 設 M 為 BD 的中點。

$DM = 3 \text{ cm}$

在 $\triangle AMD$,

$$\begin{aligned} AM &= \sqrt{8^2 - 3^2} \\ &= \sqrt{55} \text{ cm} \end{aligned}$$

1M

在 $\triangle CMD$,

$$\begin{aligned} CM &= \sqrt{12^2 - 3^2} \\ &= \sqrt{135} \text{ cm} \end{aligned}$$

在 $\triangle ACM$,

$(\sqrt{55})^2 = AC^2 + (\sqrt{135})^2 - 2(AC)(\sqrt{135}) \cos \angle ACM$ 1M

$\angle ACM \approx 27.1^\circ$

所求之角為 27.1° 。

1A

(ii) 設 Q 為 D 至 AC 的垂足。

由於 $\sin \frac{\angle DPB}{2} = \frac{DM}{PD}$,

$\angle DPB$ 在當 PD 為極小時為極大, 即 $P = Q$ 。

1A

當 P 由 A 移動至 Q , $\angle DPB$ 增加。

當 P 由 Q 移動至 C , $\angle DPB$ 減少。

1A

4. (a) 在 $\triangle ABC$,

$AC^2 = 9^2 + 15^2 - 2(9)(15) \cos 120^\circ$ 1M

$AC = 21 \text{ cm}$ 1A

在 $\triangle ADC$, $\angle ADC = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$

由於 $AD = CD$, $\angle DAC = \angle ACD = \frac{180^\circ - 60^\circ}{2} = 60^\circ$ 及 $\triangle ACD$ 為等邊三角形。

1M

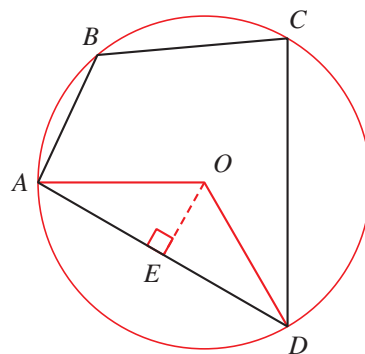
So, $AD = AC = 21 \text{ cm}$ 。

1A

(b) 所求圓的圓心在 $\triangle ACD$ 的外心 O 。設 E 為 AD 的中點。

$\angle OAE = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$ 。

$$\begin{aligned} \text{半徑} = OA &= \frac{AE}{\cos 30^\circ} \\ &= \frac{21}{2} \div \cos 30^\circ \\ &= 7\sqrt{3} \text{ cm} \end{aligned}$$



1M

1A

(c) 所求之角為 $\angle OEV$ 。

1A

$$OE = OA \sin 30^\circ = \frac{7\sqrt{3}}{2} \text{ cm} \quad 1\text{M}$$

$$\tan \angle OEV = \frac{15}{OA} \quad 1\text{M}$$

$$\angle OEV \approx 68.0^\circ \quad 1\text{A}$$

所求之角為 68.0° 。

$$5. \quad (\text{a}) \quad \angle BDC = \frac{360^\circ - 150^\circ}{2} = 105^\circ \quad 1\text{A}$$

$$50^2 = 32^2 + BD^2 - 2(32)(BD) \cos 105^\circ \quad 1\text{M}$$

$$0 = BD^2 - 64(BD) \cos 105^\circ - 1476$$

$$BD \approx 31.0 \text{ cm} \quad \text{或} \quad -47.6 \text{ cm} \quad (\text{捨去}) \quad 1\text{A}$$

$$(\text{b}) \quad (\text{i}) \quad AC^2 = 32^2 + 32^2 - 2(32)^2 \cos 40^\circ \quad 1\text{M}$$

$$AC \approx 21.9 \text{ cm}$$

所求距離為 21.9 cm 。 1A

(ii) 設 E 為 AC 的中點。

所求之角為 $\angle BED$ 。 1A

$$DE = 32 \cos \frac{40^\circ}{2} \approx 30.1 \text{ cm} \quad 1\text{M}$$

$$BE = \sqrt{50^2 - \left(\frac{AC}{2}\right)^2} \approx 48.8 \text{ cm}$$

$$BD^2 = DE^2 + BE^2 - 2(DE)(BE) \cos \angle BED$$

$$\angle BED \approx 37.7^\circ \quad 1\text{A}$$

$$(\text{iii}) \quad \triangle ACD \text{ 的面積} = \frac{1}{2}(32)(32) \sin 40^\circ \quad 1\text{M}$$

$$= 512 \sin 40^\circ \text{ cm}^2$$

$$\text{體積} = \frac{1}{3}(512 \sin 40^\circ)(BE \sin \angle BED) \quad 1\text{M}$$

$$\approx 3270 \text{ cm}^3 \quad 1\text{A}$$

另一方法：

$$\text{體積} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}(AC)(BE) \right) (DE \sin \angle BED) \quad 1\text{M}+1\text{M}$$

$$\approx 3270 \text{ cm}^3 \quad 1\text{A}$$

(c) 設 D' 及 P' 分別為 D 及 P 在平面 ABC 的投影。

由於 $\triangle BDD' \sim \triangle BPP'$ ，可得 $\frac{PP'}{DD'} = \frac{BP}{BD} = \frac{1}{2}$ 。 1M

$$\frac{ABCP \text{ 的體積}}{ABCD \text{ 的體積}} = \frac{\frac{1}{3}(\triangle ABC \text{ 的面積})(PP')}{\frac{1}{3}(\triangle ABC \text{ 的面積})(DD')}$$

$$= \frac{PP'}{DD'} = \frac{1}{2}$$

同意該宣稱。 1A