

# M2REG-AOD-2324-ASM-SET 5-MATH

## 建議題解

$$1. \quad (a) \quad \tan \theta = \tan(\angle APO - \angle BPO)$$

$$= \frac{\tan \angle APO - \tan \angle BPO}{1 + \tan \angle APO \tan \angle BPO} \quad 1M$$

$$= \frac{\frac{16}{y} - \frac{10}{y}}{1 + \frac{16}{y} \cdot \frac{10}{y}}$$

$$= \frac{6y}{y^2 + 160} \quad 1A$$

$$(b) \quad \tan \theta = \frac{6y}{y^2 + 160}$$

$$\sec^2 \theta \frac{d\theta}{dy} = \frac{6(y^2 + 160) - 6y(2y)}{(y^2 + 160)^2} \quad 1M$$

$$\frac{d\theta}{dy} = \frac{6(160 - y^2) \cos^2 \theta}{(y^2 + 160)^2} \quad 1A$$

$$\text{當 } \frac{d\theta}{dy} = 0, y = \sqrt{160}。 \quad 1A$$

| $y$                  | $0 < y < \sqrt{160}$ | $y > \sqrt{160}$ |
|----------------------|----------------------|------------------|
| $\frac{d\theta}{dy}$ | +                    | -                |

1M

$\theta$  在  $y = \sqrt{160}$  時為極大值。

$$\text{所求之值} = \tan^{-1} \frac{6\sqrt{160}}{(\sqrt{160})^2 + 160}$$

$$\approx 0.233 \text{ rad}$$

1A

2.  $h^2 + r^2 = 4^2$  1M

$$r^2 = 16 - h^2$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$= \frac{1}{3}\pi(16 - h^2)h$$
 1M

$$\frac{dV}{dh} = \frac{1}{3}\pi(16 - 3h^2)$$
 1M

當  $\frac{dV}{dh} = 0$ ,  $h = \frac{4}{\sqrt{3}}$  或  $-\frac{4}{\sqrt{3}}$  (捨去)。

|                 |                              |                              |
|-----------------|------------------------------|------------------------------|
| $h$             | $0 < h < \frac{4}{\sqrt{3}}$ | $\frac{4}{\sqrt{3}} < h < 4$ |
| $\frac{dV}{dh}$ | +                            | -                            |

1M

$V$  在  $h = \frac{4}{\sqrt{3}}$  時達至極大值。

$$\begin{aligned} \text{極大體積} &= \frac{1}{3}\pi \left[ 16 \left( \frac{4}{\sqrt{3}} \right)^2 - \left( \frac{4}{\sqrt{3}} \right)^3 \right] \\ &= \frac{128\sqrt{3}\pi}{27} \end{aligned}$$
 1A

3. 設  $P$  的  $x$  坐標為  $p$ , 及  $\triangle MNP$  的面積為  $A$ 。

$$A = \frac{1}{2}(p) \left( 3\sqrt{1 - \frac{p^2}{4}} \right)$$
 1M

$$= \frac{3p}{4}\sqrt{4 - p^2}$$

$$\frac{dA}{dp} = \frac{3}{4}(4 - p^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{3p}{8}(4 - p^2)^{-\frac{1}{2}}(-2p)$$
 1M

$$= \frac{3}{2}(4 - p^2)^{-\frac{1}{2}}(2 - p^2)$$

當  $\frac{dA}{dp} = 0$ ,  $p = \sqrt{2}$ 。

1A

|                 |                    |                    |
|-----------------|--------------------|--------------------|
| $p$             | $0 < p < \sqrt{2}$ | $\sqrt{2} < p < 2$ |
| $\frac{dA}{dp}$ | +                  | -                  |

1M

$A$  在  $p = \sqrt{2}$  時達至極大值。

$$\begin{aligned} \text{極大面積} &= \frac{3\sqrt{2}}{4}\sqrt{4 - (\sqrt{2})^2} \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$
 1A

4. (a) 設所需時間為  $T$  小時。

$$T = \frac{x}{8} + \frac{\sqrt{(6-x)^2 + 4^2}}{3}$$

$$= \frac{x}{8} + \frac{\sqrt{x^2 - 12x + 52}}{3}$$

1A

(b)  $\frac{dT}{dx} = \frac{1}{8} + \frac{1}{6}(x^2 - 12x + 52)^{-\frac{1}{2}}(2x - 12)$

$$= \frac{1}{8} + \frac{2x - 12}{6(x^2 - 12x + 52)^{\frac{1}{2}}}$$

1M

當  $\frac{dT}{dx} = 0$  ,

$$\frac{1}{8} + \frac{2x - 12}{6\sqrt{x^2 - 12x + 52}} = 0$$

1M

$$(8x - 48)^2 = 3^2(x^2 - 12x + 52)$$

$$55x^2 - 660x + 1836 = 0$$

$$x = \frac{330 - 12\sqrt{55}}{55} \quad \text{或} \quad \frac{330 + 12\sqrt{55}}{55} \quad (\text{捨去})$$

1A

|                 |                                        |                                        |
|-----------------|----------------------------------------|----------------------------------------|
| $x$             | $0 < x < \frac{330 - 12\sqrt{55}}{55}$ | $\frac{330 - 12\sqrt{55}}{55} < x < 6$ |
| $\frac{dT}{dx}$ | -                                      | +                                      |

1M

$T$  在  $x = \frac{330 - 12\sqrt{55}}{55} \approx 4.38$  時達至極小值。

$$\text{最短所需時間} = \frac{x}{8} + \frac{\sqrt{x^2 - 12x + 52}}{3}$$

$$\approx 1.99 \text{ h} > 1.5 \text{ h}$$

1A

不同意該宣稱。

1A

$$5. \quad (a) \quad HB = \sqrt{x^2 + (\sqrt{3})^2} \quad 1M$$

$$= \sqrt{x^2 + 3} \text{ m}$$

$$\frac{BC}{BK} = \frac{AB}{HB}$$

$$\frac{x+y}{x} = \frac{9}{\sqrt{x^2+3}} \quad 1M$$

$$y = \frac{9x}{\sqrt{x^2+3}} - x \quad 1$$

$$(b) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{9(x^2+3)^{\frac{1}{2}} - \frac{9x}{2}(x^2+3)^{-\frac{1}{2}}(2x)}{x^2+3} - 1 \quad 1M$$

$$= \frac{9[(x^2+3) - x^2]}{(x^2+3)^{\frac{3}{2}}} - 1$$

$$= \frac{27}{(x^2+3)^{\frac{3}{2}}} - 1$$

$$\text{當 } \frac{dy}{dx} = 0,$$

$$(x^2+3)^{\frac{3}{2}} = 27$$

$$x^2+3 = 9$$

$$x = \pm\sqrt{6}$$

|     |                    |                            |
|-----|--------------------|----------------------------|
| $x$ | $0 < x < \sqrt{6}$ | $\sqrt{6} < x < \sqrt{78}$ |
| $x$ | +                  | -                          |

1M

$y$  在  $x = \sqrt{6}$  時達至極大值。

$$\text{所求之值} = \frac{9(\sqrt{6})}{\sqrt{(\sqrt{6})^2+3}} - \sqrt{6}$$

$$= 2\sqrt{6}$$

1A

$$(c) \quad (i) \quad \frac{AC}{HK} = \frac{AB}{HB}$$

$$AC = \frac{9\sqrt{3}}{\sqrt{x^2+3}}$$

$$S = \frac{\left(\frac{9\sqrt{3}}{\sqrt{x^2+3}} + \sqrt{3}\right)\left(\frac{9x}{\sqrt{x^2+3}} - x\right)}{2}$$

$$= \frac{81\sqrt{3}x}{2(x^2+3)} - \frac{\sqrt{3}x}{2} \quad 1$$

$$(ii) \quad \frac{dS}{dx} = \frac{81\sqrt{3}}{2} \left[ \frac{(x^2+3) - x(2x)}{(x^2+3)^2} \right] - \frac{\sqrt{3}}{2} \quad 1M$$

$$= \frac{81\sqrt{3}(3-x^2)}{2(x^2+3)^2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\left. \frac{dS}{dx} \right|_{x=\sqrt{6}} = \frac{81\sqrt{3}[3-(\sqrt{6})^2]}{2[(\sqrt{6})^2+3]^2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= -2\sqrt{3} \neq 0 \quad 1M$$

因此， $S$  在當  $y$  達至極大值時不會達至極大值。

1A

6. (a)  $100e^{-2.5} = [-(25)^2 + A(25) + B]e^{-\frac{25}{10}}$  1M

$$25A + B = 725$$

$$75e^{-3} = [-(30)^2 + A(30) + B]e^{-\frac{30}{10}}$$

$$30A + B = 975$$

求解後，可得  $A = 50$  及  $B = -525$ 。

1A+1A

(b) (i)  $\frac{dW(x)}{dx} = (-x^2 + 50x - 525)e^{-\frac{x}{10}} \left(-\frac{1}{10}\right) + e^{-\frac{x}{10}}(-2x + 50)$  1M

$$= \frac{1}{10}(x^2 - 70x + 1025)e^{-\frac{x}{10}}$$

1A

(ii) 當  $\frac{dW(x)}{dx} = 0$ ,

$$x^2 - 70x + 1025 = 0$$

1M

$$x = 35 - 10\sqrt{2} \quad \text{或} \quad 35 + 10\sqrt{2} \quad (\text{捨去})$$

1A

| $x$                | $15 < x < 35 - 10\sqrt{2}$ | $35 - 10\sqrt{2} < x < 35$ |
|--------------------|----------------------------|----------------------------|
| $\frac{dW(x)}{dx}$ | +                          | -                          |

1M

$W(x)$  在  $x = 35 - 10\sqrt{2}$  達至極大值。

$$\text{最大重量} = [-(35 - 10\sqrt{2})^2 + 50(35 - 10\sqrt{2}) - 525]e^{-\frac{35-10\sqrt{2}}{10}}$$

$$\approx 10.29 \text{ t}$$

1A

(c)  $P(x) = \frac{1000W(x)}{x}$

$$\frac{dP(x)}{dx} = 1000 \left[ \frac{xW'(x) - W(x)}{x^2} \right]$$

1M

$$\left. \frac{dP(x)}{dx} \right|_{x=35-10\sqrt{2}} = 1000 \left[ \frac{(35 - 10\sqrt{2})W'(35 - 10\sqrt{2}) - W(35 - 10\sqrt{2})}{(35 - 10\sqrt{2})^2} \right]$$

$$= 1000 \left[ \frac{-W(35 - 10\sqrt{2})}{(35 - 10\sqrt{2})^2} \right]$$

$$\neq 0$$

1M

當  $W(x)$  達至極大值時， $P(x)$  不達至極大值。

該宣稱不正確。

1A