

M2INT-AOI-2324-ASM-SET 2-MATH

建議題解

1. (a) 設 $x = 3 + 3 \sin \theta$ 。則 $dx = 3 \cos \theta d\theta$ 。

$$\int \sqrt{x(6-x)} dx = \int \sqrt{(3+3\sin\theta)(3-3\sin\theta)} 3 \cos \theta d\theta \quad 1M$$

$$= 9 \int \cos^2 \theta d\theta$$

$$= \frac{9}{2} \int (1 + \cos 2\theta) d\theta \quad 1A$$

$$= \frac{9\theta}{2} + \frac{9 \sin 2\theta}{4} + \text{常數} \quad 1A$$

$$= \frac{9}{2} \sin^{-1} \frac{x-3}{3} + \frac{9}{2} \sin \theta \cos \theta + \text{常數}$$

$$= \frac{9}{2} \sin^{-1} \frac{x-3}{3} + \frac{9}{2} \left(\frac{x-3}{3} \right) \sqrt{1 - \left(\frac{x-3}{3} \right)^2} + \text{常數} \quad 1M$$

$$= \frac{9}{2} \sin^{-1} \frac{x-3}{3} + \frac{x-3}{2} \sqrt{6x-x^2} + \text{常數} \quad 1A$$

- (b) 在第一象限中， $y^2 = \sqrt{6x-x^2} = \sqrt{x(6-x)}$ 。 1M

$$\text{體積} = \pi \int_0^6 \sqrt{x(6-x)} dx \quad 1M$$

$$= \pi \left[\frac{9}{2} \sin^{-1} \frac{x-3}{3} + \frac{x-3}{2} \sqrt{6x-x^2} \right]_0^6 \quad 1M$$

$$= \frac{9\pi^2}{2} \quad 1A$$

$$2. \quad (a) \quad \text{體積} = \pi \int_4^{4+h} y \, dy \quad 1M$$

$$= \pi \left[\frac{y^2}{2} \right]_4^{4+h}$$

$$= \frac{\pi}{2} (h^2 + 8h) \quad 1$$

(b) (i) $V = V_1 + \frac{\pi}{2} (h^2 + 8h)$ ，其中 V_1 為該平截頭體的體積，對 $4 \leq H \leq 12$ ， $h = H - 4$ 。

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi(2h+8)}{2} \frac{dh}{dt} \quad 1A$$

$$8 = \frac{\pi[2(7-4)+8]}{2} \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{8}{7\pi}$$

所求之率為 $\frac{8}{7\pi}$ cm/s。 1A

(ii) 考慮形成該平截頭體的圓錐。設該圓錐的高為 H_0 cm。

$$\frac{H_0 - 4}{H_0} = \frac{2}{4} \quad 1M$$

$$H_0 = 8 \quad 1A$$

$$V = \frac{\pi}{3} (4^2)(8) \left[1 - \left(\frac{8-H}{8} \right)^3 \right] \quad 1M+1A$$

$$= \frac{128\pi}{3} \left[1 - \left(1 - \frac{H}{8} \right)^3 \right] \quad 1$$

(iii) 上半部的體積 = $\frac{\pi}{2} [8^2 + 8(8)] = 64\pi \text{ cm}^3$

已漏出的奶 = $\frac{\pi}{2} \times 130 = 65\pi \text{ cm}^3 > 64\pi \text{ cm}^3$

餘下的奶的深度小於 4 cm。

$$64\pi + \frac{128\pi}{3} \left[1 - \left(1 - \frac{4}{8} \right)^3 \right] - 65\pi = \frac{128\pi}{3} \left[1 - \left(1 - \frac{H}{8} \right)^3 \right] \quad 1M$$

$$\left(1 - \frac{H}{8} \right)^3 = \frac{19}{128}$$

$$1 - \frac{H}{8} = \left(\frac{19}{128} \right)^{\frac{1}{3}} \quad 1A$$

$$V = \frac{128\pi}{3} \left[1 - \left(1 - \frac{H}{8} \right)^3 \right]$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{128\pi}{3} \left[0 - 3 \left(1 - \frac{H}{8} \right)^2 \left(-\frac{1}{8} \right) \frac{dH}{dt} \right]$$

$$= 16\pi \left(1 - \frac{H}{8} \right)^2 \frac{dH}{dt} \quad 1A$$

$$-\frac{\pi}{2} = 16\pi \left(\frac{19}{128} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{dH}{dt}$$

$$\frac{dH}{dt} \approx -0.111$$

所求之率為 0.111 cm/s。 1A

$$3. \quad (a) \quad \frac{d}{dx}(e^x \cos x) = e^x \cos x - e^x \sin x \quad 1A$$

$$(b) \quad \int e^x \cos 2x \, dx = e^x \cos 2x + 2 \int e^x \sin 2x \, dx \quad 1M$$

$$= e^x \cos 2x + 2e^x \sin 2x - 4 \int e^x \cos 2x \, dx \quad 1M$$

$$5 \int e^x \cos 2x \, dx = e^x \cos 2x + 2e^x \sin 2x + \text{常數}$$

$$\int e^x \cos 2x \, dx = \frac{e^x \cos 2x}{5} + \frac{2e^x \sin 2x}{5} + \text{常數} \quad 1A$$

$$(c) \quad e^x(\sin 2x + 1) = e^x(\cos 2x + 1)$$

$$\sin 2x = \cos 2x$$

$$\tan 2x = 1$$

$$x = \frac{\pi}{8} \quad \text{或} \quad \frac{5\pi}{8} \quad 1A$$

$$\text{體積} = \pi \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{5\pi}{8}} [e^{2x}(\sin 2x + 1)^2 - e^{2x}(\cos 2x + 1)^2] \, dx \quad 1M+1A$$

$$= \pi \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{5\pi}{8}} e^{2x}(\sin^2 2x - \cos^2 2x) \, dx + 2\pi \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{5\pi}{8}} e^{2x}(\sin 2x - \cos 2x) \, dx$$

$$= -\pi \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{5\pi}{8}} e^{2x} \cos 4x \, dx + 2\pi \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{5\pi}{8}} e^{2x}(\sin 2x - \cos 2x) \, dx$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} e^u \cos 2u \, du + \pi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} e^u(\sin u - \cos u) \, du \quad \text{其中 } u = 2x \quad 1M$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[\frac{e^u \cos 2u}{5} + \frac{2e^u \sin 2u}{5} \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} - \pi \left[e^u \cos u \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \quad 1M$$

$$= \frac{\pi}{5} \left(e^{\frac{\pi}{4}} - e^{\frac{5\pi}{4}} \right) + \frac{\pi}{\sqrt{2}} \left(e^{\frac{5\pi}{4}} + e^{\frac{\pi}{4}} \right) \quad 1A$$

4. (a) (i) 代 $y = 0$ 至 $3x^2 - 2y - 4 = 0$ ，可得 $x = \pm\sqrt{\frac{4}{3}}$ 。 1A

點 $\left(\pm\sqrt{\frac{4}{3}}, 0\right)$ 在曲線 $3x^2 + 2y + k = 0$ 上，

$$3 \times \frac{4}{3} + 2(0) + k = 0$$

$$k = -4$$

1A

- (ii) BC 的方程可寫成 $y = -\frac{3}{2}x^2 + 2$ 。

頂點的坐標為 $(0, 2)$ 。

1A

- (b) (i) 當 $0 \leq h \leq 2$ ，

$$\text{體積} = \pi \int_0^h \left[\frac{2y+4}{3} - \frac{4-2y}{3} \right] dx$$

1M+1A

$$= \pi \int_0^h \frac{4y}{3} dy$$

$$= \pi \left[\frac{2y^2}{3} \right]_0^h$$

1M

$$= \frac{2\pi h^2}{3} \text{ 立方單位}$$

1A

- (ii) 當 $2 < h \leq 6$ ，

$$\text{體積} = \frac{2\pi(2)^2}{3} + \pi \int_2^h \frac{2y+4}{3} dy$$

1M

$$= \frac{8\pi}{3} + \pi \left[\frac{4y}{3} + \frac{y^2}{3} \right]_2^h$$

$$= \pi \left(\frac{h^2}{3} + \frac{4h}{3} - \frac{4}{3} \right) \text{ 立方單位}$$

1A

- (c) 設 V 立方單位為杯中的水在時間 t 秒時的體積。

當 $V = \frac{28\pi}{3}$ ，可得 $V > \frac{8\pi}{3}$ 及故此 $h > 2$ 。

1M

$$\frac{28\pi}{3} = \pi \left(\frac{h^2}{3} + \frac{4h}{3} - \frac{4}{3} \right)$$

$$h^2 + 4h - 32 = 0$$

1M

$$h = 4 \text{ 或 } -8 \text{ (捨去)}$$

對 $2 < h \leq 6$ ， $\frac{dV}{dt} = \pi \left(\frac{2h}{3} + \frac{4}{3} \right) \frac{dh}{dt}$ 。

1M

當 $\frac{dV}{dt} = \frac{8\pi}{3}$ 及 $h = 4$ ，

$$\frac{8\pi}{3} = \pi \left(\frac{2 \times 4}{3} + \frac{4}{3} \right) \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{2}{3}$$

所求變率為每秒 $\frac{2}{3}$ 單位。

1A