

M2INT-AOD-2324-ASM-SET 2-MATH

建議題解

$$1. \quad (a) \quad f'(x) = 2x + \frac{8}{(x-1)^2} \quad 1A$$

$$f''(x) = 2 - \frac{16}{(x-1)^3} \quad 1A$$

$$(b) \quad (i) \quad \text{當 } f'(x) = 0,$$

$$2x = -\frac{8}{(x-1)^2} \quad 1M$$

$$2x(x-1)^2 = -8$$

$$2x^3 - 4x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$2(x+1)(x^2 - 3x + 4) = 0 \quad 1M$$

$$x = -1 \quad \text{或} \quad x^2 - 3x + 4 = 0 \quad (\text{捨去})$$

x	$x < -1$	$-1 < x < 1$	$x > 1$
$f'(x)$	-	+	+

所求範圍為 $-1 < x < 1$ 或 $x > 1$ 。 1A

$$(ii) \quad \text{當 } f''(x) = 0,$$

$$2(x-1)^3 = 16$$

$$x - 1 = 2$$

$$x = 3$$

x	$x < 1$	$1 < x < 3$	$x > 3$
$f''(x)$	+	-	+

所求範圍為 $x < 1$ 或 $x > 3$ 。 1A

$$(c) \quad f(-1) = 5 \text{ 及 } f(3) = 5。$$

相對極小點為 $(-1, 5)$ ，沒有相對極大點。 1A+1A

拐點為 $(3, 5)$ 。 1A

$$(d) \quad \text{垂直漸近線為 } x = 1。 \quad 1A$$

沒有水平漸近線或斜漸近線。

(e) (正確漸近線及點)

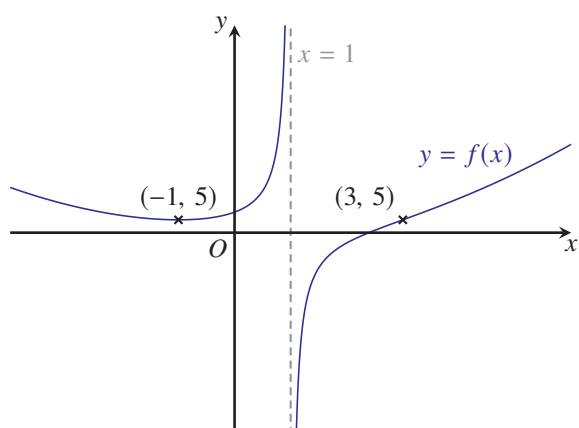
1A

(正確形狀)

1A

(全部正確)

1A



2. (a) $\frac{x^2 - 4}{x^2 + 4} = \frac{(x + 2)(x - 2)}{x^2 + 4}$
 x 截距為 2 及 -2, y 截距為 -1。 1A

(b) $f(x) = 1 - \frac{8}{x^2 + 4}$ 1A

$f'(x) = \frac{16x}{(x^2 + 4)^2}$ 1A

$f''(x) = \frac{16(x^2 + 4)^2 - 16x(2)(x^2 + 4)(2x)}{(x^2 + 4)^4}$
 $= \frac{-48x^2 + 64}{(x^2 + 4)^3}$ 1A

(c) (i) 當 $f'(x) = 0$, $x = 0$ 。
 當 $x = 0$, $f''(x) = 1 > 0$ 及 $f(x) = -1$ 。
 極小點為 $(0, -1)$ 。 1M
 1A

(ii) 當 $f''(x) = 0$, $x = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$ 。

x	$x < -\frac{2}{\sqrt{3}}$	$-\frac{2}{\sqrt{3}} < x < \frac{2}{\sqrt{3}}$	$x > \frac{2}{\sqrt{3}}$
$f''(x)$	-	+	-

1M

當 $x = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$, $y = -\frac{1}{2}$ 。

拐點為 $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{2}\right)$ 及 $\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{2}\right)$ 。 1A

(d) $f(x) = 1 - \frac{8}{x^2 + 4}$ 1M

沒有垂直漸近線, 水平漸近線為 $y = 1$ 。 1A

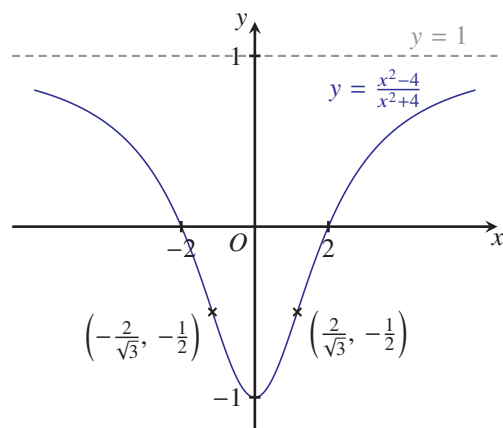
(e) $f(-x) = \frac{(-x)^2 - 4}{(-x)^2 + 4} = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4} = f(x)$

因此, $f(x)$ 為偶函數。 1

(f) (正確形狀) 1A

(漸近線 + 截距 + 駐點) 1A

(全部正確) 1A



3. (a) (i) x -intercept = 3 1A

$$y\text{-intercept} = -\frac{27}{4} \quad 1A$$

(ii) Vertical asymptote is $x = 2$. 1A

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(x-3)^3}{(x-2)^2} \\ &= \frac{x^3 - 9x^2 + 27x - 27}{x^2 - 4x + 4} \\ &= x - 5 + \frac{3x - 7}{(x-2)^2} \end{aligned} \quad 1M$$

Oblique asymptote is $y = x - 5$. 1A

(iii) $f(x) = x - 5 + \frac{3x - 7}{(x-2)^2}$

$$f'(x) = 1 + \frac{3(x-2)^2 - (3x-7)2(x-2)}{(x-2)^4} \quad 1M$$

$$= 1 + \frac{3(x-2) - 2(3x-7)}{(x-2)^3}$$

$$= 1 + \frac{8-3x}{(x-2)^3}$$

$$= \frac{(x-3)^2 x}{(x-2)^3}$$

$$f''(x) = \frac{-3(x-2)^3 - (8-3x)(3)(x-2)^2}{(x-2)^6} \quad 1M$$

$$= \frac{-3(x-2) - 3(8-3x)}{(x-2)^4}$$

$$= \frac{6(x-3)}{(x-2)^4}$$

When $\frac{dy}{dx} = 0$, $x = 0$ or 3 .

x	$x < 0$	$0 < x < 2$	$2 < x < 3$	$x > 3$
$\frac{dy}{dx}$	+	-	+	+

1M

Maximum point is $\left(0, -\frac{27}{4}\right)$. 1A

No minimum point. 1A

When $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, $x = 3$.

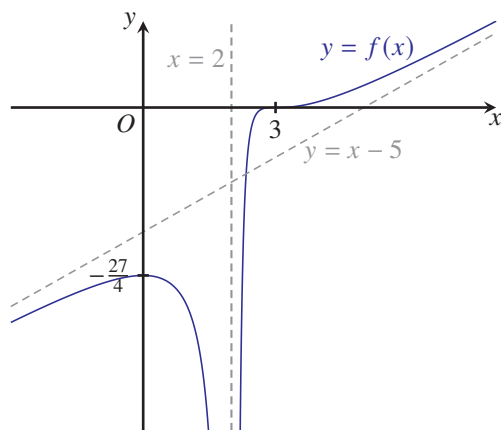
x	$x < 2$	$2 < x < 3$	$x > 3$
$\frac{d^2y}{dx^2}$	-	+	

1M

Point of inflexion is $(3, 0)$. 1A

(b) (Correct shape) 1A

(All correct) 1A



4. (a) (i) $f'(x) = \frac{(2x-4)(x^2+1) - (x^2-4x+1)(2x)}{(x^2+1)^2}$ 1M

$$= \frac{4x^2-4}{(x^2+1)^2}$$
 1A

(ii) $f'(x) = \frac{4(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$ 。

當 $f'(x) = 0$, $x = \pm 1$ 。 1M

x	$x < -1$	$-1 < x < 1$	$x > 1$
$f'(x)$	+	-	+

 1M

$f(-1) = 3$ 及 $f(1) = -1$ 。

因此, $f(x)$ 的極大值及極小值分別為 3 及 -1。 1

(b) $f''(x) = \frac{8x(x^2+1)^2 - (4x^2-4)(2)(x^2+1)(2x)}{(x^2+1)^4}$ 1M

$$= \frac{8x(x^2+1) - 4x(4x^2-4)}{(x^2+1)^3}$$

$$= \frac{-8x^3 + 24x}{(x^2+1)^3}$$
 1A

$$= \frac{-8x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$$

當 $f''(x) = 0$, $x = 0$ 或 $\pm\sqrt{3}$ 。

x	$x < -\sqrt{3}$	$-\sqrt{3} < x < 0$	$0 < x < \sqrt{3}$	$x > \sqrt{3}$
$f''(x)$	+	-	+	-

 1M

$f(-\sqrt{3}) = 1 + \sqrt{3}$, $f(0) = 1$ 及 $f(\sqrt{3}) = 1 - \sqrt{3}$

拐點為 $(-\sqrt{3}, 1 + \sqrt{3})$ 、 $(0, 1)$ 及 $(\sqrt{3}, 1 - \sqrt{3})$ 。 1A+1A

(c) 沒有垂直漸近線。 1A

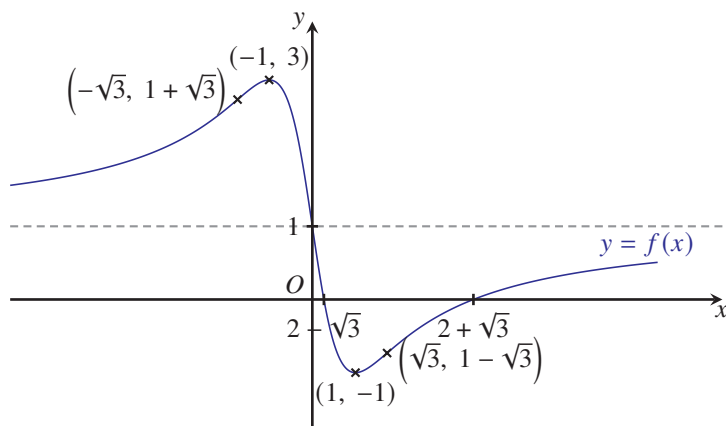
$f(x) = 1 - \frac{4x}{x^2+1}$ 。 1M

水平漸近線為 $y = 1$ 。 1A

(d) (正確形狀) 1A

(正確漸近線及點) 1A

(全部正確) 1A



5. (a) 垂直漸近線為 $x = 1$ 。

1A

$$f(x) = x + 2 + \frac{3x - 2}{(x - 1)^2}$$

1M

斜漸近線為 $y = x + 2$ 。

1A

$$(b) f'(x) = 1 + \frac{3(x - 1)^2 - (3x - 2)(2)(x - 1)}{(x - 1)^4}$$

1M

$$= 1 + \frac{-3x + 1}{(x - 1)^3}$$

1A

$$1 + \frac{-3x + 1}{(x - 1)^3} = 0$$

$$(x - 1)^3 - 3x + 1 = 0$$

$$x^2(x - 3) = 0$$

$$x = 0 \text{ 或 } 3$$

1A

x	$x < 0$	$0 < x < 1$	$1 < x < 3$	$x > 3$
$f'(x)$	+	+	-	+

1M

極小點為 $\left(3, \frac{27}{4}\right)$ ，沒有極大點。

1A

$$(d) f''(x) = \frac{-3(x - 1)^3 - (-3x + 1)(3)(x - 1)^2}{(x - 1)^3}$$

$$= \frac{6x}{(x - 1)^4}$$

1

- (e) 當 $f''(x) = 0$ ， $x = 0$ 。

x	$x < 0$	$0 < x < 1$	$x > 1$
$f''(x)$	-	+	+

1M

拐點為 $(0, 0)$ 。

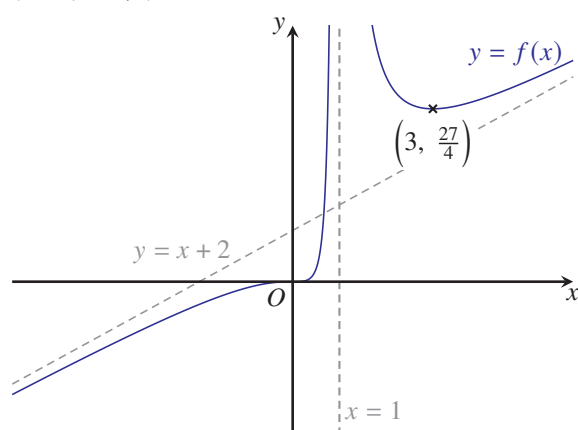
1A

- (f) (正確形狀)

1A

(全部正確)

1A



6. (a) (i) $f'(x) = \frac{(2x+k)(x-1) - (x^2+kx-2)(1)}{(x-1)^2}$ 1M

$$= \frac{x^2 - 2x + 2 - k}{(x-1)^2}$$
 1A

(ii) $f'(-1) = \frac{1+2+2-k}{(-1-1)^2} = 0$

$$k = 5$$
 1

當 $f'(x) = 0$,

$$\frac{x^2 - 2x + 2 - 5}{(x-1)^2} = 0$$

$$\frac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2} = 0$$

$$x = -1 \text{ 或 } 3$$

因此, $h = 3$ 。 1A

(b) (i) $f(x) = \frac{x^2 + 5x - 2}{x - 1}$ 。故此, $f(-1) = 3$ 及 $f(3) = 11$ 。

極大點為 $(-1, 3)$ 。 1A

極小點為 $(3, 11)$ 。 1A

(ii) $f''(x) = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - (x^2-2x-3)(2)(x-1)}{(x-1)^4}$

$$= \frac{2(x-1)[(x-1)^2 - (x^2-2x-3)]}{(x-1)^4}$$

$$= \frac{8}{(x-1)^3}$$
 1A

對所有實數值 x , $f''(x) \neq 0$ 。

因此, 沒有拐點。 1

(c) 垂直漸近線為 $x = 1$ 。 1A

$$f(x) = \frac{x^2 + 5x - 2}{x - 1}$$

$$= x + 6 + \frac{4}{x - 1}$$
 1M

斜漸近線為 $y = x + 6$ 。 1A

(d) y 截距 = 2。 1A

(正確形狀) 1A

(正確漸近線及點) 1A

(全部正確) 1A

