REG-EOC-2324-ASM-SET 8-MATH
建議題解

結構式試題

1. (a) (i) $CE = EB$ （已知）

$OA = OB$ （半徑）

$OE // AC$ （中點定理）

$\angle BOE = \angle OAD$ （同位角，$AC // OE$）

$\angle DOE + \angle BOE = 2\angle OAD$ （圓心角兩倍於圓周角）

$\angle DOE + \angle BOE = 2\angle BOE$

$\angle DOE = \angle BOE$

評分標準		
情況 1	附有正確理由的任何正確證明。	2
情況 2	未附有正確理由的任何正確證明。	1

(ii) $\angle DOE = \angle BOE$ （已證明）

$OE = OE$ （公共邊）

$OD = OB$ （半徑）

$\triangle DOE \cong \triangle BOE$ （SAS）$\angle OBE = 90°$ （切線 ⊥ 半徑）

$\angle ODE = \angle OBE$ （全等 △ 的對應角）

$= 90°$

因此，DE 為該圓在 D 的切線 （切線 ⊥ 半徑的逆定理）。

評分標準		
情況 1	附有正確理由的任何正確證明。	2
情況 2	未附有正確理由的任何正確證明。	1

(b) (i) $\angle ODE + \angle OBE = 90° + 90° = 180°$ 1M

因此，O、B、E、D 共圓。

由於 $\angle OBE = 90°$，OE 為圓 $OBED$ 的直徑。 1M

O 的坐標為 $(0, 8)$。 1A

OE 的斜率 $= \dfrac{8-0}{0+6} = \dfrac{4}{3}$

所求方程為

$$y - 0 = -\frac{3}{4}(x+6)$$ 1M

$$3x + 4y + 18 = 0$$ 1A

(ii) $\triangle BDE$ 的外心為 OE 的中點。

圓心的坐標為 $(-3, 4)$。

所求方程為

$$(x+3)^2+(y-4)^2=(-6+3)^2+(0-4)^2 \qquad \text{1M}$$

$$(x+3)^2+(y-4)^2=25 \qquad \text{1A}$$

2. (a) $\angle CAB = \angle BAD$ （公共角）

$\angle ABC = \angle ADB$ （交錯弓形的圓周角）

$\triangle ABC \sim \triangle ADB$ （AA）

評分標準		
情況 1	附有正確理由的任何正確證明。	2
情況 2	未附有正確理由的任何正確證明。	1

(b) (i)

$$\frac{AC}{AB}=\frac{AB}{AD} \qquad \text{1M}$$

$$\frac{\sqrt{9^2+12^2}}{36+9}=\frac{36+9}{\sqrt{9^2+12^2}+CD}$$

$$CD=120$$

Γ 的半徑為 60。

留意 $\angle EBA = 90°$。

E 的坐標為 $(60,\ 36)$。 1M

所求方程為

$$(x-60)^2+(y-36)^2=60^2$$

$$(x-60)^2+(y-36)^2=3600 \qquad \text{1A}$$

(ii) E 為 CD 的中點。

D 的坐標為 $(108,\ 72)$。 1A

設 $x^2+y^2+dx+ey+f=0$ 為 $\triangle BED$ 的外接圓的方程。

$$\begin{cases} 0^2+36^2+0+36e+f=0 \\ 60^2+36^2+60d+36e+f=0 \\ 108^2+72^2+108d+72e+f=0 \end{cases} \qquad \text{1M}$$

求解後，可得 $d=-60$、$e=-252$ 及 $f=7776$。

所求方程為 $x^2+y^2-60x-252y+7776=0$。 1A

E 為 CD 的中點。

D 的坐標為 $(108,\ 72)$。 1A

留意該外接圓的圓心在 BE 的垂直平分線上，即 $x=30$。

設 $\triangle BED$ 的外接圓的圓心的坐標為 $(30,\ k)$。

$$\sqrt{(30-0)^2+(k-36)^2}=\sqrt{(30-108)^2+(k-72)^2} \qquad \text{1M}$$

$$k^2-72k+2196=k^2-144k+11\,268$$

$$k=126$$

所求方程為

$$(x-30)^2+(y-126)^2=(0-30)^2+(36-126)^2$$

$$(x-30)^2+(y-126)^2=9000$$ 1A

(iii) $\triangle BED$ 的外接圓的面積

$=(\sqrt{30^2+126^2-7776})^2\pi$ 1M

$\approx 28\,300$

設 r 為 $\triangle BED$ 的內切圓的半徑。

考慮 $\triangle BED$ 的面積。

$$\frac{(36+9)(108)}{2}=\frac{(AB)(r)}{2}+\frac{(BD)(r)}{2}+\frac{(AD)(r)}{2}$$ 1M

$$r\approx 16.5$$

($\triangle BED$ 的內切圓的面積) $\times 30$

$=\pi r^2\times 30$

$\approx 25\,800$

$<$ $\triangle BED$ 的外接圓的面積

同意該宣稱。 1

3. (a) 圓心的坐標為 $(4,\ 10)$。 1M

所求方程為

$$(x-4)^2+(y-10)^2=(-6-4)^2+(0-10)^2$$ 1M

$$(x-4)^2+(y-10)^2=200$$ 1A

(b) L_1 的斜率 $=\dfrac{20-0}{14+6}=1$

L_1 的方程為

$$y-0=1(x+6)$$ 1M

$$y=x+6$$

L_1 分別與 L_2 及 y 軸相交於 $(k-6,\ k)$ 及 $(0,\ 6)$。

$$\frac{(k-6)(k-6)}{2}=200$$ 1M

$$(k-6)^2=400$$

$$k=26 \quad 或 \quad -14（捨去）$$ 1A

4. (a) 設 G 的坐標為 $(h,\ 26)$。
留意 G 在 AB 的垂直平分線上。

$$h = \frac{5+13}{2} \qquad \text{1M}$$
$$= 9$$

C 的方程為

$$(x-9)^2 + (y-26)^2 = (5-9)^2 + (23-26)^2 \qquad \text{1M}$$
$$(x-9)^2 + (y-26)^2 = 25 \qquad \text{1A}$$

(b) $\sqrt{(k-9)^2 + (38-26)^2} = 15$ 1M

$$k^2 - 18k = 0$$
$k = 18$ 或 0（捨去） 1A

(c) (i) T、P 與 G 共線。 1A

(ii) C 的半徑為 5。
所求之比 $= GP : PT$ 1M
$= 5 : (15-5)$
$= 1 : 2$ 1A

5. (a) (i) $x^2 + (mx)^2 - 400x - 300mx + 40\,000 = 0$ 1M

$(1 + m^2)x^2 - (300m + 400)x + 40\,000 = 0$

$\Delta = (300m + 400)^2 - 4(1 + m^2)(40\,000) > 0$ 1M

$10\,000(-7m^2 + 24m) > 0$

$0 < m < \frac{24}{7}$ 1A

(ii) M 的 $x = \frac{1}{2}\left[\frac{300m + 400}{1 + m^2}\right]$

$= \frac{50(3m + 4)}{1 + m^2}$

M 的 $y = m \cdot \frac{50(3m + 4)}{1 + m^2}$

$= \frac{50m(3m + 4)}{1 + m^2}$ 1

(b) (i) AB 的垂直平分線為通過 O 及 C 的圓心的直線。 1M

C 的圓心的坐標為 $(200,\ 150)$。

所求方程為

$$y - 0 = \frac{150 - 0}{200 - 0}(x - 0)$$

$3x - 4y = 0$ 1A

(ii) 留意當 $m = 0$ 或 $\frac{24}{7}$ 時，L 與 C 相切。

當 $m = 0$，L 與 C 的交點的坐標為 $(200,\ 0)$。

B 的坐標為 $(200,\ 0)$。 1A

當 $m = \frac{24}{7}$ 時，可得 A 的坐標為 $(56,\ 192)$。

將 C 的圓心記為 $G\,(200,\ 150)$。

假定 G 與 M 為相異點。

留意 $\angle GMO = 90^\circ$ 及 $\angle OBG = 90^\circ$。

可得 O、B、G、M 共圓。 1M

由於 $\angle OAG = 90^\circ$ 及 $\angle GMO = 90^\circ$，可得 O、A、G、M 共圓。

因此，O、A、M、G、B 共圓。

若 G 與 M 重合，O、A、G、B 同為共圓。

留意 OG 為該圓的直徑。

所求之圓的圓心為 $(100,\ 75)$。 1M

所求方程為

$$(x - 100)^2 + (y - 75)^2 = (0 - 100)^2 + (0 - 75)^2$$

$(x - 100)^2 + (y - 75)^2 = 15\,625$ 1A

(iii) 將圓 AMB 的圓心記為 D。

$$\tan \angle BOG = \frac{150}{200}$$

$$\angle BOG \approx 36.9^\circ$$

$\angle ADB = 2\angle AOB = 2(2\angle BOG) \approx 147^\circ$ 1M

Γ 的長度 $\leq 2\pi(125) \times \dfrac{\angle ADB}{360^\circ}$ 1M

$\approx 322 < 330$

不同意該宣稱。 1A

6. (a) (i) $\angle BEC = \angle BDC$ （同弓形內的圓周角）

$\angle ECG = \angle BEC$ （錯角，$BE // CG$）

$= \angle BDC$

$\angle BCE = \angle BDE$ （同弓形內的圓周角）

$\angle BCG = \angle BCE + \angle ECG$

$= \angle BDE + \angle BDC$ （已證明）

$= \angle CDG$

評分標準		
情況 1	附有正確理由的任何正確證明。	2
情況 2	未附有正確理由的任何正確證明。	1

(ii) $\angle CBD = \angle DBE$ （等弧對等角）

$\angle BHC = \angle DBE$ （錯角，$BE // CG$）

$= \angle CBD$

$BC = HC$ （等角對等邊）

評分標準		
情況 1	附有正確理由的任何正確證明。	2
情況 2	未附有正確理由的任何正確證明。	1

(b) (i) $BH : DH = \frac{144}{25} : 8$ 1M

$= 18 : 7$ 1A

H 的 x 坐標 $= \frac{18}{25} \times (6) = \frac{108}{25}$ 1M

H 的坐標為 $\left(\frac{108}{25}, -\frac{144}{25}\right)$。 1A

(ii) BD 的斜率 $= \frac{-8}{6} = -\frac{4}{3}$

CE 的斜率 $= \frac{0 + \frac{144}{25}}{6 + \frac{42}{25}} = \frac{3}{4}$ 1M

由於 $\frac{-4}{3} \times \frac{3}{4} = -1$，$BD \perp CE$，故此 $\angle CFD = 90° = \angle CGD$。 1A

C、D、G、F 共圓。 *（同弓形內的圓周角的逆定理）* 1

(iii) CD 為圓 $CDGF$ 的直徑。

CD 的斜率 $= \frac{-8 + \frac{144}{25}}{6 + \frac{42}{25}} = -\frac{7}{24}$

所求切線的斜率 $= \frac{24}{7}$ 1M

所求方程為

$$y + 8 = \frac{24}{7}(x - 6)$$

$$24x - 7y - 200 = 0$$ 1A

7. (a) $(x-2)^2+(y-6)^2=r^2$ 1A

(b) (i) 設 G 為 C' 的圓心，則 $G(-2,\ 6-c)$。 1A

由於 $AG \perp PQ$，

$$\frac{6-c-6}{-2-2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$$ 1M

$$c=8$$ 1A

(ii) AG 的中點在 PQ 上，即 $(0,\ 2)$ 在 PQ 上。 1M

PQ 的方程為 $y=-\frac{x}{2}+2$。 1A

(iii) $(x-2)^2+\left(-\frac{x}{2}+2-6\right)^2=r^2$ 1M

$$\frac{5}{4}x^2+20-r^2=0$$

a 及 d 為該方程的根。

故此，$a+d=0$ 及 $ad=\frac{4(20-r^2)}{5}$。 1M

$$\begin{aligned}(a-d)^2&=(a+d)^2-4ad\\&=\frac{16(r^2-20)}{5}\end{aligned}$$ 1A

(c) $PQ^2=(a-d)^2+\left[\left(-\frac{a}{2}+2\right)-\left(-\frac{d}{2}+2\right)\right]^2$

$$\begin{aligned}80&=\frac{5}{4}(a-d)^2\\&=4(r^2-20)\end{aligned}$$ 1M

$r^2=40$

$r=2\sqrt{10}$ 或 $-2\sqrt{10}$（捨去）

$AB=\sqrt{(2+1)^2+(6-1)^2}=\sqrt{34}<r$

故此，B 在 C 內。

同意該宣稱。 1A