

建議題解

1. B	2. B	3. D	4. D	5. D
6. C	7. A	8. D	9. A	10. B
11. D	12. C	13. D	14. D	15. D
16. C	17. D	18. C	19. B	20. D
21. D	22. C	23. B	24. D	25. A
26. D	27. A	28. C	29. C	30. C

$$\begin{array}{r} x^2 - 2x + 4 \\ x + 2 \overline{) x^3 + 0x^2 + 0x + 16} \\ \underline{x^3 + 2x^2} \\ -2x^2 + 0x \\ \underline{-2x^2 - 4x} \\ 4x + 16 \\ \underline{4x + 8} \\ 8 \end{array}$$
$$\begin{array}{r}
 - 2x^2 + 2x + 6 \\
 \hline
 x-3 - 2x^3 + 8x^2 + 0x + 3 \\
 - \underline{-2x^3 + 6x^2} \\
 2x^2 + 0x \\
 \underline{2x^2 - 6x} \\
 6x + 3 \\
 \underline{6x - 18} \\
 21
 \end{array}$$

$x^2 - x + 1$ 不能為當 $P(x)$ 除以 $x^2 - 2$ 時的餘式。

4. D

餘式的次方小於除式的次方。

$x^2 + x + 2$ 不能為當 $x^3 + px^2 + ax + r$ 除以 $x^2 + 1$ 時的餘式。

5. D

設 $x^3 - 3x^2 + kx - 12 = (x^2 + 4)(Ax + B)$ ，其中 A 及 B 均為常數。

比較 x^3 的係數及常數，可得 $A = 1$ 及 $B = -3$ 。

在 $(x^2 + 4)(x - 3)$ 的展式中， x 的係數為 4。

因此， $k = 4$ 。

6. C

$$\text{餘數} = f\left(\frac{3}{2}\right)$$

7. A

$$\begin{aligned}\text{餘數} &= \left(-\frac{3}{2} + 4\right)(-3 - 3) + (-3) + 3 \\ &= -15\end{aligned}$$

8. D

$$\begin{aligned}\text{餘數} &= (10 + 1)(2 + 2)(2 - 1) \\ &= 44\end{aligned}$$

9. A

$$\begin{aligned}(3)^3 + p(3) + 6 &= 3 \times [2(3)^3 + (p + 1)(3)^2 + 8(3) - 12] \\ 33 + 3p &= 225 + 27p \\ p &= -8\end{aligned}$$

10. B

可得

$$\begin{cases} 6 = (-1)^2 - a + b \\ -2 = a + b - 5 \end{cases}$$

求解後，可得 $a = -1$ 及 $b = 4$ 。

11. D

$$2a = a(-1)^3 + 2(-1)^2 + 7$$

$$3a = 9$$

$$a = 3$$

$$\text{餘數} = 3 + 2 + 7$$

$$= 12$$

12. C

$$\begin{aligned}\text{餘數} &= (a+b)(-1+1) + 2(-1) + 5 \\ &= 3\end{aligned}$$

13. D

$$\begin{aligned}\text{餘數} &= f(-3-3) \\ &= f(-6)\end{aligned}$$

14. D

$$\begin{aligned}\text{餘數} &= f\left[3\left(-\frac{1}{3}\right)\right] \\ &= f(-1) \\ &= (-1)^{1010} - 2(-1)^{101} + 1 \\ &= 1 + 2 + 1 \\ &= 4\end{aligned}$$

15. D

$(2x+1)$ 及 $(x-3)$ 均為 $P(x)$ 的因式。
因此， $(2x+1)(x-3) = 2x^2 - 5x - 3$ 為 $P(x)$ 的因式。

16. C

$$\begin{aligned}0 &= (-1)^{99} + 3(-1)^2 + k \\ 0 &= -1 + 3 + k \\ k &= -2 \\ \text{餘數} &= 1^{99} + 3(1)^2 - 2 \\ &= 2\end{aligned}$$

17. D

$$\begin{aligned}(-1)^{2n} + k(-1) - 2k &= 0 \\ 1 - 3k &= 0 \\ k &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

18. C

$$\begin{aligned}0 &= a\left(-\frac{1}{5}\right)^3 + \left(-\frac{1}{5}\right)^2 - 20\left(-\frac{1}{5}\right) - 4 \\ a &= 5 \\ \text{餘數} &= 5(-1)^3 + (-1)^2 - 20(-1) - 4 \\ &= 12\end{aligned}$$

19. B

由於 $f(1) = -12$,

$$2 - 3 - 8 + k = -12$$

$$k = -3$$

I. $f(-1) = 0 \Rightarrow \checkmark$

II. $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{15}{2} \neq 0 \Rightarrow \times$

III. $f(3) = 0 \Rightarrow \checkmark$

20. D

設 $f(x) = 3x^3 + ax^2 - 22x + b = (3x^2 + 5x - 2)(Cx + D)$, 其中 C 及 D 均為常數。

留意 $3x^2 + 5x - 2 = (3x - 1)(x + 2)$ 。

可得 $f\left(\frac{1}{3}\right) = f(2) = 0$ 。

$$\begin{cases} 0 = 3\left(\frac{1}{3}\right)^3 + a\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 22\left(\frac{1}{3}\right) + b \\ 0 = 3(-2)^3 + a(-2)^2 - 22(-2) + b \end{cases}$$

求解後, 可得 $a = -7$ 及 $b = 8$ 。

因此, $a + 2b = 9$ 。

21. D

$$a(-2)^3 + 4a(-2)^2 - 24 = 0$$

$$a = 3$$

$$g(2) = 3(2)^3 + 12(2)^2 - 24 = 48$$

22. C

$$g(1) = 1 + a + b = 0$$

$$a + b = -1$$

$$\text{餘數} = (-1)^8 + a(-1)^7 + b = 1 - a + b = 1 - a + (-1 - a) = -2a$$

23. B

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 4\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + k\left(-\frac{1}{2}\right) + 3 = 0$$

$$k = 5$$

$$\text{餘數} = f(-1) = -4 - 5 + 3 = -6$$

24. D

$$0 = k^3 - (k - 1)k^2 + 2k - 3$$

$$0 = k^2 + 2k - 3$$

$$k = -3 \quad \text{或} \quad 1$$

25. A

$$(-2)^3 - k(-2)^2 + 8(-2) - 4 = 0$$

$$k = -7$$

26. D

可得 $f(-3) = -63$ 及 $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ 。

$$\begin{cases} -63 = a(-3)^3 + 2(-3)^2 + b(-3) + 3 \\ 0 = a\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + b\left(\frac{1}{2}\right) + 3 \end{cases}$$

求解後，可得 $a = 4$ 及 $b = -8$ 。

27. A

$$0 = 2^3 - 4(2)^2 + 2k + 6$$

$$k = 1$$

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$$

$$= (x - 2)(x^2 - 2x - 3)$$

$$= (x - 2)(x - 3)(x + 1)$$

因此， $(x - 3)$ 同為 $f(x)$ 的因式。

28. C

$$0 = 4\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 3\left(-\frac{1}{2}\right) + k$$

$$k = -1$$

$$f(x) = 4x^3 - 3x - 1$$

$$= (2x + 1)(2x^2 - x - 1)$$

$$= (2x + 1)^2(x - 1)$$

29. C

設 $f(x) = (x - 2)q(x)$ ，其中 $q(x)$ 為多項式。

$$f(x + 1) = (x + 1 - 2)q(x + 1)$$

$$= (x - 1)q(x + 1)$$

因此， $x - 1$ 為 $f(x + 1)$ 的因式。

30. C

設 $f(x) = (x - 2)q(x)$ ，其中 $q(x)$ 為一多項式。

$f(x - 3) = (x - 5)q(x - 3)$ 可被 $x - 5$ 整除。

結構式試題

31. (a) 設 $f(x) = (x^2 - 4)(Ax + B) + 4x + k$ ，其中 A 及 B 均為常數。 1A

$$f(2) = 0 + 4(2) + k = 0 \quad 1M$$

$$k = -8 \quad 1A$$

(b) 可得

$$\begin{cases} f(-4) = (16 - 4)(-4A + B) - 16 - 8 = 0 \\ f(0) = (-4)(B) - 8 = 40 \end{cases} \quad 1M$$

求解後，可得 $A = -\frac{7}{2}$ 及 $B = -12$ 。 1A

$$f(x) = (x^2 - 4)\left(-\frac{7}{2}x - 12\right) + 4x - 8 = 0$$

$$-\frac{1}{2}(x+2)(x-2)(7x+24) + 4(x-2) = 0$$

$$\frac{1}{2}(x-2)[-(x+2)(7x+24) + 8] = 0 \quad 1M$$

$$\frac{1}{2}(x-2)(-7x^2 - 38x - 40) = 0$$

$$-\frac{1}{2}(x-2)(7x+10)(x+4) = 0$$

$$x = 2 \quad \text{或} \quad -4 \quad \text{或} \quad -\frac{10}{7}$$

不同意該宣稱。 1A

32. (a) $f(x) = (2x^2 - 1)(x + a) + bx - 9$ 1M

$$\begin{cases} f(1) = 0 = (2 - 1)(1 + a) + b - 9 \\ f(2) = 1 = (8 - 1)(2 + a) + 2b - 9 \end{cases} \quad 1M$$

求解後，可得 $a = -4$ 及 $b = 12$ 。 1A+1A

- (b) $f(x) = (2x^2 - 1)(x - 4) + 12x - 9 = 0$

$$2x^3 - 8x^2 + 11x - 5 = 0$$

$$(x - 1)(2x^2 - 6x + 5) = 0 \quad 1M$$

$$x = 1 \quad \text{或} \quad 2x^2 - 6x + 5 = 0$$

對 $2x^2 - 6x + 5 = 0$ ， $\Delta = 6^2 - 4(2)(5) = -4 < 0$ 。該方程沒有實根。 1M

不同意該宣稱。 1A

33. (a) $8 = 1^3 + 3(1)^2 + a(1) + 1$ 1M

$a = 3$ 1A

$0 = (-1)^3 - 3(-1)^2 + b(-1) + 6$

$b = 2$ 1A

(b) $Q(x) = 0$

$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$

$(x + 1)(x^2 + 2x + 1) = 0$ 1M

$(x + 1)(x + 1)^2 = 0$

$x = -1$ 1A

(c) $P(x) = 0$

$x^3 - 3x^2 + 2x + 6 = 0$

$(x + 1)(x^2 - 4x + 6) = 0$ 1M

$x = -1$ 或 $x^2 - 4x + 6 = 0$

對 $x^2 - 4x + 6 = 0$,

$\Delta = 4^2 - 4(1)(6)$

$= -8 < 0$ 1M

故此， $P(x) = 0$ 只有一個實根 -1 。

不同意該宣稱。 1A

34. (a) 可得

$$\begin{cases} -7 = [3(3) + p](3 - 2)^2 + q \\ 0 = (12 + p)(2)^2 + q \end{cases}$$
 1M

求解後，可得 $p = \frac{-32}{3}$ 及 $q = \frac{-16}{3}$ 。 1A+1A

(b) $0 = \left(3x - \frac{32}{3}\right)(x - 2)^2 - \frac{16}{3}$

$0 = (9x - 32)(x^2 - 4x + 4) - 16$

$0 = 9x^3 - 68x^2 + 164x - 144$

$0 = (x - 4)(9x^2 - 32x + 36)$ 1M+1A

$x = 4$ 或 $9x^2 - 32x + 36 = 0$

對 $9x^2 - 32x + 36 = 0$ ， $\Delta = 32^2 - 4(9)(36) = -272 < 0$ 。 1M

該方程沒有實根。

因此，共有 1 個實根。 1A

35. (a) 設 $p(x) = (x^2 - 2x + 3)(Ax + B) + x + 13$ ，其中 A 及 B 均為常數。 1M
比較 x^3 的係數及常數項，可得

$$\begin{cases} 2 = A \\ -20 = 3B + 13 \end{cases}$$

求解後，可得 $A = 2$ 及 $B = -11$ 。

1A

$$a = (1)(B) + (-2)(A) = -15 \text{ 及 } b = 3A - 2B + 1 = 29。$$

1A

(b) $p(5) = 2(5)^3 - 15(5)^2 + 29(5) - 20$ 1M
 $= 0$

$x - 5$ 為 $p(x)$ 的因式。

1

(c) $0 = 2x^3 - 15x^2 + 29x - 20$
 $= (x - 5)(2x^2 - 5x + 4)$ 1M

$$x = 5 \text{ 或 } 2x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$\text{對 } 2x^2 - 5x + 4 = 0, \Delta = 5^2 - 4(2)(4) = -7 < 0。$$

1M

方程 $2x^2 - 5x + 4 = 0$ 沒有實根，故此沒有無理根。

方程 $p(x) = 0$ 有零個無理根。

不同意該宣稱。

1A