

REG-EOC-2324-ASM-SET 3-MATH

建議題解

多項選擇題

- | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1. A | 2. A | 3. C | 4. D | 5. C |
| 6. C | 7. C | 8. C | 9. A | 10. D |
| 11. C | 12. A | 13. C | 14. B | 15. B |
| 16. B | 17. B | 18. C | 19. A | 20. A |
| 21. D | 22. B | 23. A | 24. C | 25. B |
| 26. A | 27. D | 28. C | 29. A | 30. B |

1. A

所求方程為

$$(x + 2)^2 + (y - 5)^2 = (2 + 2)^2 + (1 - 5)^2$$
$$x^2 + y^2 + 4x - 10y - 3 = 0$$

2. A

所求方程為

$$(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = (3 + 2)^2 + (5 - 4)^2$$
$$x^2 + y^2 + 4x - 8y - 6 = 0$$

3. C

半徑 = $0 - (-4) = 4$ 。該方程為

$$(x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 4^2$$
$$x^2 + y^2 + 8x - 6y + 9 = 0$$

4. D

所求方程為

$$(x + 5)^2 + (y - 12)^2 = (0 + 5)^2 + (0 - 12)^2$$
$$(x + 5)^2 + (y - 12)^2 = 169$$

5. [C]

圓心 $(-10, 12)$ 。圓方程為 $x^2 + y^2 + 20x - 24y + F = 0$ 的形式，其中 F 為一常數。
 AB 的中點的坐標為 $(-10, 0)$ 。

因此， A 及 B 的 x 坐標為 $-10 \pm 16 = 6$ 或 -26 。

$$(6)^2 + (0)^2 + 20(6) - 24(0) + F = 0$$

$$F = -156$$

$$C : x^2 + y^2 + 20x - 24y - 156 = 0$$

6. [C]

該圓通過點 $(5 \pm 12, 0)$ ，即 $(-7, 0)$ 及 $(17, 0)$ 。

圓心 $(5, -7) \Rightarrow$ 該圓為 $x^2 + y^2 - 10x + 14y + F = 0$ 的形式。

代 $(-7, 0)$ ， $F = -119$ 。

7. [C]

$$\text{半徑} = \sqrt{\left(\frac{8}{2}\right)^2 + 3^2} = 5$$

所求方程為

$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 5^2$$

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$$

8. [C]

圓心為 AB 的中點。

$$\text{圓心的坐標為} \left(-\frac{3}{2}, 2\right).$$

所求方程為

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + (y - 2)^2 = \left(0 + \frac{3}{2}\right)^2 + (1 - 2)^2$$

$$x^2 + y^2 + 3x - 4y + 3 = 0$$

9. [A]

圓心為 AB 的中點。

$$\text{圓心的坐標為} (-1, -1).$$

所求方程為

$$(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = (2 + 1)^2 + (3 + 1)^2$$

$$x^2 + y^2 + 2x + 2y - 23 = 0$$

10. [D]

$$\text{兩點的距離} = \sqrt{(0+8)^2 + (0+6)^2} = 10 = 2(5)$$

連接兩點的線段因此為所求的圓的一直徑。

圓心的坐標為 $(-4, -3)$ 。

所求方程為

$$(x+4)^2 + (y+3)^2 = 5^2$$

$$x^2 + y^2 + 8x + 6y = 0$$

11. [C]

圓心為 AC 的中點，坐標為 $(7, 5)$ 。

所求方程為 $x^2 + y^2 - 14x - 10y + F = 0$ ，其中 F 為一常數。

$$8^2 + 8^2 - 14(8) - 10(8) + F = 0$$

$$F = 64$$

12. [A]

由於 $\angle AOB = 90^\circ$ ，其中 O 為原點。

該圓的圓心為 AB 的中點。

圓心的坐標為 $\left(\frac{-3}{2}, 2\right)$ 。

所求方程為

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + (y - 2)^2 = \left(0 + \frac{3}{2}\right)^2 + (0 - 2)^2$$

$$x^2 + y^2 + 3x - 4y = 0$$

13. [C]

圓心為 $(4, 0)$ 和 $(0, -6)$ 的中點。

圓心的坐標為 $(2, -3)$ 。

所求方程為

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = (0 - 2)^2 + (0 + 3)^2$$

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y = 0$$

14. [B]

連接 $(0, 8)$ 與 $(-6, 0)$ 的線段為直徑。

圓心的坐標為 $(-3, 4)$ 。

所求方程為 $x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$ (通過原點)。

15. [B]

$$\text{圓心的 } x \text{ 坐標} = \frac{1+5}{2} = 3$$

$$\text{圓心的 } y \text{ 坐標} = \frac{1+(-3)}{2} = -1$$

$$\text{半徑} = 5 - 3 = 2$$

$$\text{所求方程為 } (x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 4.$$

16. [B]

設 C 的坐標為 $(h, 0)$ ，其中 $h < 0$ 。

由於 $y = 3$ 為該圓的一切線，圓的半徑為 3。

由於 $x = 1$ 為該圓的一切線，可得

$$1 - h = 3$$

$$h = -2$$

$$\text{所求方程為 } (x + 2)^2 + y^2 = 9.$$

17. [B]

$$\text{半徑} = 3$$

所求方程為

$$(x + 5)^2 + (y + 3)^2 = 3^2$$

$$x^2 + y^2 + 10x + 6y + 25 = 0$$

18. [C]

$$\text{圓心的 } y \text{ 坐標} = 2$$

$$\text{圓心的 } x \text{ 坐標} = \frac{1+4}{2} = \frac{5}{2}$$

$$\text{半徑} = \frac{5}{2}$$

所求方程為

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + (y - 2)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2$$

$$x^2 + y^2 - 5x - 4y + 4 = 0$$

19. [A]

$$\text{圓心的 } y \text{ 坐標} = \frac{(-1) + (-9)}{2} = -5$$

$$\text{圓的半徑} = 0 - (-5) = 5$$

設圓心的坐標為 $(h, -5)$ 。

$$\sqrt{(h - 0)^2 + (-5 + 1)^2} = 5$$

$$h = -3 \quad \text{或} \quad (\text{捨去})$$

20. A

圓心的 x 坐標 = $\frac{2+8}{2} = 5$

半徑 = 5 及圓心的 y 坐標 = 4

所求方程為

$$(x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 16$$

$$x^2 + y^2 - 10x - 8y + 16 = 0$$

21. D

設半徑為 r 。

圓心的坐標為 $(r, -r)$ 。

圓心在 L 上。

$$(r) + 2(-r) + 4 = 0$$

$$r = 4$$

所求方程為

$$(x - 4)^2 + (y + 4)^2 = 4^2$$

$$x^2 + y^2 - 8x + 8y + 16 = 0$$

22. B

設圓心的坐標為 $(h, 0)$ 。

C 的方程為 $(x - h)^2 + y^2 = (-h)^2$ 。

$$(-2 - h)^2 + (-4)^2 = h^2$$

$$h^2 + 4h + 20 = h^2$$

$$h = -5$$

所求方程為

$$(x + 5)^2 + y^2 = 5^2$$

$$x^2 + y^2 + 10x = 0$$

23. A

設圓心的坐標為 $(1, k)$ 。

C 的方程為 $(x - 1)^2 + (y - k)^2 = k^2$ 。

$$(5 - 1)^2 + (8 - k)^2 = k^2$$

$$k^2 - 16k + 80 = k^2$$

$$k = 5$$

所求方程為

$$(x - 1)^2 + (y - 5)^2 = 5^2$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 10y + 1 = 0$$

24. C

設該圓的半徑為 r 。

圓心的坐標為 $(-r, r)$ 。

C 的方程為 $(x + r)^2 + (y - r)^2 = r^2$ 。

$$\frac{r - 12}{-r - 0} = \frac{12 - 0}{0 + 24}$$

$$2r - 24 = -r$$

$$r = 8$$

所求方程為

$$(x + 8)^2 + (y - 8)^2 = 8^2$$

$$x^2 + y^2 + 16x - 16y + 64 = 0$$

25. B

設圓心的坐標為 $(h, 0)$ 。

$$\sqrt{(h - 0)^2 + (5 - 0)^2} = \sqrt{(h - 6)^2 + (1 - 0)^2}$$

$$h^2 + 25 = h^2 - 12h + 37$$

$$h = 1$$

所求方程為

$$(x - 1)^2 + y^2 = (0 - 1)^2 + 5^2$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 25 = 0$$

26. A

A. ✓。

B. ✗。圓心 $(1, -7)$ 不在 L 上。

C. ✗。圓心 $\left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right)$ 不在 L 上。

D. ✗。 $(3, 4)$ 不在圓上。

27. [D]

- A. ✗。圓心 $\left(-\frac{5}{2}, 5\right)$ 不在直線 $x + y - 1 = 0$ 上。
- B. ✗。圓心 $\left(\frac{19}{2}, -4\right)$ 不在直線 $x + y - 1 = 0$ 上。
- C. ✗。圓心 $\left(\frac{17}{2}, -\frac{19}{2}\right)$ 不在直線 $x + y - 1 = 0$ 上。
- D. ✓。圓心 $\left(-\frac{17}{2}, \frac{19}{2}\right)$ 在直線 $x + y - 1 = 0$ 上，
且 $(0, 0)$ 及 $(3, 4)$ 均滿足該方程。

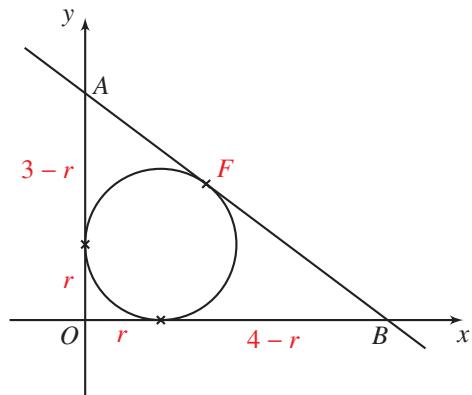
28. [C]

設 F 為 AB 與該圓的切線。設 r 為半徑。

$$AF = 3 - r \text{ 及 } BF = 4 - r$$
$$(3 - r) + (4 - r) = \sqrt{3^2 + 4^2}$$

$$r = 1$$

圓的方程為 $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$ 。



29. [A]

圓的半徑為 2。設 C_3 的圓心為 (h, k) 。

留意由三個圓心形成等邊三角形。

藉考慮連接 C_1 與 C_3 的圓心的線段，

$$h - 2 = (2 + 2) \cos 60^\circ \quad \text{及} \quad k - 2 = (2 + 2) \sin 60^\circ$$

$$h = 4 \quad k = 2 + 2\sqrt{3}$$

只有選項 A 的圓心在 $(4, 2 + 2\sqrt{3})$ 。

30. [B]

$$\begin{aligned} \text{圓心的 } y \text{ 坐標} &= \frac{2\sqrt{3} + 8\sqrt{3}}{2} \\ &= 5\sqrt{3} \end{aligned}$$

圓心為 $\triangle CAB$ 的形心/垂心/外心/內心。

(備註：當三角形為等邊時，四心在同一位置。)

- A. ✗。圓心 $(-5, 5\sqrt{3})$ 不應在直線 AB 上。
- B. ✓。
- C. ✗。圓心的 y 坐標 $= -5\sqrt{3} \neq 5\sqrt{3}$
- D. ✗。圓心的 y 坐標 $= -5\sqrt{3} \neq 5\sqrt{3}$

結構式試題

31. (a) $(x - 7)^2 + (y + 3)^2 = (-8 - 7)^2 + (5 + 3)^2$ 1M

$(x - 7)^2 + (y + 3)^2 = 289$ 1A

(b) $JK = \sqrt{(7 + 1)^2 + (-3 - 25)^2} = \sqrt{848} > C$ 的半徑。 1M

因此， J 在圓外。 1A

(c) (i) J 、 K 與 P 共線。 1A

(ii) 該直線的斜率 $= \frac{25 + 3}{-1 - 7} = -\frac{7}{2}$ 。
所求的方程為

$$y - 25 = -\frac{7}{2}(x + 1) \quad 1M$$

$$7x + 2y - 43 = 0 \quad 1A$$

32. (a) (i) 考慮 $\triangle ABC$ 及 $\triangle ODA$,

$$\begin{aligned}
 AB &= AD && (\text{已知}) \\
 \angle ACB &= \angle ACD && (\text{等弦對等角}) \\
 \angle OAD &= \angle ACD && (\text{交錯弓形的圓周角}) \\
 &= \angle ACB \\
 \angle ADO &= \angle ABC && (\text{圓內接四邊形外角}) \\
 \triangle ABC &\sim \triangle ODA && (AA) \\
 \frac{AB}{BC} &= \frac{OD}{AD} && (\text{相似 } \triangle \text{ 的對應邊}) \\
 AB^2 &= BC \cdot OD
 \end{aligned}$$

評分標準	
情況 1	附有正確理由的任何正確證明。
情況 2	未附有理由的任何正確證明。
情況 3	附有一正確理由和一正確步驟之未完整的證明。

(ii) 由於 $\angle ACD = \angle ACB$,

$$\begin{aligned}
 \cos \angle ACD &= \cos \angle ACB \\
 \frac{CD^2 + AC^2 - AD^2}{2(CD)(AC)} &= \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2(AC)(BC)} && 1M \\
 2(CD^2 + AC^2 - AD^2) &= AC^2 + BC^2 - AB^2 \\
 2CD^2 + 2AC^2 - 2AD^2 &= AC^2 + (2CD)^2 - AD^2 && 1M \\
 AC^2 &= 2CD^2 + AD^2 && 1
 \end{aligned}$$

(b) (i) 由於 $\angle BCD = 90^\circ$, BD 為一直徑。

$$\text{圓心} = \left(\frac{15+27}{2}, \frac{0+24}{2} \right) = (21, 12)$$

該圓的方程為

$$\begin{aligned}
 (x - 21)^2 + (y - 12)^2 &= (15 - 21)^2 + (0 - 12)^2 && 1M \\
 (x - 21)^2 + (y - 12)^2 &= 180 && 1A
 \end{aligned}$$

(ii) $AB^2 = BC \cdot OD$

$$\begin{aligned}
 AB &= \sqrt{24 \cdot 15} \\
 &= 6\sqrt{10} && 1A \\
 AC^2 &= 2CD^2 + AD^2 \\
 AC^2 &= 2(12)^2 + (6\sqrt{10})^2 && 1M \\
 AC &= 18\sqrt{2} && 1A
 \end{aligned}$$