REG-CP1A-2324-ASM-SET 4-MATH
建議題解

結構式試題

1. (a) $\angle BAD = \angle BCE$ （已知）

$\angle CBE = \angle BDA$ （錯角，$BC // AD$）

$\triangle ABD \sim \triangle CEB$ （AA）

評分標準		
情況 1	附有正確理由的任何正確證明。	2
情況 2	未附有正確理由的任何正確證明。	1

(b) 設 $BE = x$ cm。

$$\frac{BD}{BE} = \frac{AD}{CB}$$ 1M

$$\frac{x + 45}{x} = \frac{85}{34}$$

$$x = 30$$

可得 $BD = 75$ cm。

$AB^2 + BD^2 = 40^2 + 75^2 = 7225\text{ cm}^2$ 1M

$AD^2 = 85^2 = 7225\text{ cm}^2 = AB^2 + BD^2$

因此，$\triangle ABD$ 為直角三角形。 1A

2. (a) $AD = CB$ （正方形性質）

$\angle ADR = 90°$ （正方形性質）

$\angle CBP = 90°$ （正方形性質）

$= \angle ADR$

$\angle CPB = \angle RAB$ （同位角，$AR // PC$）

$\angle ARD = \angle RAB$ （錯角，$AB // DC$）

$= \angle CPB$

$\triangle ADR \cong \triangle CBP$ （AAS）

評分標準		
情況 1	附有正確理由的任何正確證明。	2
情況 2	未附有正確理由的任何正確證明。	1

(b) $\angle ARD + \angle DAR + 90° = 180°$

$$\angle ARD + \frac{\angle ARD}{4} = 90°$$

$$\angle ARD = 72°$$

由於 $\triangle ADR \cong \triangle CBR$，可得 $\angle CPB = \angle ARD = 72°$。 1M

留意 $QC = AR = PC$。$\triangle CPQ$ 為等腰三角形。 1M

$\angle CQB = \angle CPB = 72°$ 1A

3. (a) (i) $AB = AD$ （已知）

$\angle ABC = \angle ADC = 90°$ （已知）

$AC = AC$ （公共邊）

$\triangle ABC \cong \triangle ADC$ （RHS）

評分標準		
情況 1	附有正確理由的任何正確證明。	2
情況 2	未附有正確理由的任何正確證明。	1

(ii) $\triangle ABC \cong \triangle ADC$ （已證明）

$CD = BC$ （全等 △ 的對應邊）

$\angle ECD = \angle ECB$ （全等 △ 的對應角）

$CE = CE$ （公共邊）

$\triangle BCE \cong \triangle DCE$ （SAS）

評分標準		
情況 1	附有正確理由的任何正確證明。	2
情況 2	未附有正確理由的任何正確證明。	1

(b) $\angle BFD + \angle FBC = 90° + 90° = 180°$

故此，$DE // BC$。 1M

可得 $\angle DEC = \angle BCE$ 及 $\angle DEC = \angle BEC$。

因此，可得 $\angle BEC = \angle BCE$ 及 $BE = BC$。 1M

則 $DE = CD = CB = BE$ 及 $BCDE$ 為菱形。

該宣稱正確。 1A

4. (a) $\angle BAC = \angle ADC$ （已知）

$\angle DAC = \angle ACB$ （錯角，$AD // BC$）

$\triangle ADC \sim \triangle CAB$ （AA）

評分標準		
情況 1	附有正確理由的任何正確證明。	2
情況 2	未附有正確理由的任何正確證明。	1

(b) $\frac{AC}{CB} = \frac{DC}{AB}$

$\frac{AC}{625} = \frac{168}{175}$ 1M

$AC = 600\text{ cm}$

$AB^2 + AC^2 = 175^2 + 600^2 = 390\,625\text{ cm}^2$

$BC^2 = 625^2 = 390\,625\text{ cm}^2 = AB^2 + AC^2$ 1M

可得 $\angle BAC = 90°$ 及 $\angle ADC = \angle BAC = 90°$。

同意該宣稱。 1A

5. (a) $\triangle ABE \sim \triangle CDE$ （已知）

$\angle BAE = \angle DCE$ （相似 △ 的對應角）

$AB // DC$ （錯角相等）

評分標準		
情況 1	附有正確理由的任何正確證明。	2
情況 2	未附有正確理由的任何正確證明。	1

(b) $\angle BDC = \angle ABD$ 1M

$\angle BDC + \angle ACD = \angle BEC$

$\angle BDC + 2\angle BDC = 75°$

$\angle BDC = 25°$

$\angle ADC = \dfrac{180° - \angle ACD}{2}$ 1M

$= 65°$

$\angle ADB = 65° - 25°$

$= 40°$ 1A

6. (a) $\angle ABE = \angle ECF = 90°$ （正方形性質）

$\angle BEA + \angle ABE + \angle BAE = 180°$ （△ 內角和）

$\angle BAE = 90° - \angle BEA$

$\angle AEF = 90°$ （已知）

$\angle BEA + \angle AEF + \angle CEF = 180°$ （直線上的鄰角）

$\angle CEF = 90° - \angle BEA$

$= \angle BAE$

$\triangle ABE \sim \triangle ECF$ （AA）

評分標準		
情況 1	附有正確理由的任何正確證明。	2
情況 2	未附有正確理由的任何正確證明。	1

(b) $\dfrac{BE}{CF} = \dfrac{AB}{EC}$

$\dfrac{48 - 12}{CF} = \dfrac{48}{12}$ 1M

$CF = 9\text{ cm}$

所求面積

$= 48^2 - \dfrac{(48)(36)}{2} - \dfrac{(12)(9)}{2} - \dfrac{(48)(48-9)}{2}$ 1M

$= 450\text{ cm}^2$ 1A

7. (a) (i) $EA = EF$ （已知）

$ED = ED$ （公共邊）

$\angle EAD = 90°$ （長方形性質）

$\angle EFD = 90°$ （已知）

$= \angle EAD$

$\triangle EAD \cong \triangle EFD$ （RHS）

評分標準		
情況 1	附有正確理由的任何正確證明。	2
情況 2	未附有正確理由的任何正確證明。	1

(ii) $\angle EBF = \angle FCD = 90°$ （長方形性質）

$\angle BEF = 180° - 90° - \angle BFE$ （△ 內角和）

$= 90° - \angle BFE$

$\angle EFD = 90°$

$\angle CFD = 180° - 90° - \angle BFE$ （直線上的鄰角）

$= 90° - \angle BFE$

$= \angle BEF$

$\triangle EBF \sim \triangle FCD$ （AA）

評分標準		
情況 1	附有正確理由的任何正確證明。	2
情況 2	未附有正確理由的任何正確證明。	1

(b) (i) $FD = AD = 30\text{ cm}$

$CF = \sqrt{30^2 - 24^2} = 18\text{ cm}$

$BF = 30 - 18 = 12\text{ cm}$

由於 $\triangle EBF \sim \triangle FCD$，可得

$\frac{EF}{FD} = \frac{BF}{CD}$ 1M

$\frac{EF}{30} = \frac{12}{24}$

$EF = 15\text{ cm}$ 1A

(ii) $DE = \sqrt{15^2 + 30^2} = 15\sqrt{5}\text{ cm}$

設由 G 至 DE 的最短距離為 $h\text{ cm}$。

$\frac{(DE)(h)}{2} = \frac{(15)(30)}{2}$ 1M

$h \approx 13.4$

> 13

因此，該點 G 不存在。 1A

8. (a) 可得 $CE = AD = 7\text{ cm}$ 及 $DF = CG$。 1M

$$\begin{aligned} CG &= DF \\ &= 10 - CE + EF \\ &= 10 - 7 + 3 \\ &= 6\text{ cm} \end{aligned}$$ 1A

(b) $\angle HEF = \angle CEG$ （公共角）

$\triangle ADF \cong \triangle ECG$ （已知）

$\angle EFH = \angle EGC$ （同位角，$\cong \triangle s$）

$\triangle EHF \sim \triangle ECG$ （AA）

評分標準		
情況 1	附有正確理由的任何正確證明。	2
情況 2	未附有正確理由的任何正確證明。	1

(c) $EG = \sqrt{6^2 + 7^2} = \sqrt{85}\text{ cm}$ 1M

設 h 為 H 至 EF 的垂直距離。

考慮 $\triangle EFH$ 與 $\triangle CEG$ 的面積比。

$$\frac{\left(\frac{(3)(h)}{2}\right)}{\left(\frac{(7)(6)}{2}\right)} = \left(\frac{3}{\sqrt{85}}\right)^2$$ 1M

$$h = \frac{126}{85}$$

$$\begin{aligned} HT\text{ 的最短長度} &= 7 - h \\ &\approx 5.52\text{ cm} \\ &< 5.6\text{ cm} \end{aligned}$$ 1M

同意該宣稱。 1A

9. (a) 設 P 的坐標為 $(x,\ y)$。

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-12)^2}=\sqrt{(x-4)^2+(y-0)^2} \quad \text{1M}$$

$$x^2+y^2-24y+144=x^2+y^2-8x+16$$

$$x-3y+16=0 \quad \text{1A}$$

(b) (i) G 的坐標為 $\left(2k-4,\ \dfrac{12+k}{2}\right)$。

G 在 Γ 上。

$$(2k-4)-3\left(\frac{12+k}{2}\right)+16=0 \quad \text{1M}$$

$$k=12$$

G 的坐標為 $(20,\ 12)$。 1A

(ii) C: $x^2+y^2-40x-24y+384=0$

$$x^2-40x+384=0$$

$$x=16 \quad 或 \quad 24$$

D 及 E 的坐標分別為 $(16,\ 0)$ 及 $(24,\ 0)$。 1A

$$所求面積=\frac{[(20-0)+(24-16)](12)}{2} \quad \text{1M}$$

$$=168 \quad \text{1A}$$

10. (a) 設 G 的坐標為 $(h,\ 26)$。

留意 G 在 AB 的垂直平分線上。

$$h=\frac{5+13}{2} \quad \text{1M}$$

$$=9$$

C 的方程為

$$(x-9)^2+(y-26)^2=(5-9)^2+(23-26)^2 \quad \text{1M}$$

$$(x-9)^2+(y-26)^2=25 \quad \text{1A}$$

(b) $$\sqrt{(k-9)^2+(38-26)^2}=15 \quad \text{1M}$$

$$k^2-18k=0$$

$$k=18 \quad 或 \quad 0（捨去） \quad \text{1A}$$

(c) (i) T、P 與 G 共線。 1A

(ii) C 的半徑為 5。

所求之比 $=GP:PT$ 1M

$=5:(15-5)$

$=1:2$ 1A

11. (a) L_1 的斜率 $= \dfrac{6-0}{4-0} = \dfrac{3}{2}$ 1A

L_2 的斜率 $= -\dfrac{2}{3}$

所求方程為

$$y - 6 = -\frac{2}{3}(x-4) \quad \text{1M}$$

$$2x + 3y - 26 = 0 \quad \text{1A}$$

(b) (i) Γ 平行於 L_1。 1A

(ii) N 的坐標為 $(13,\ 0)$。 1A

所求方程為

$$\sqrt{(x-4)^2 + (y-6)^2} = \sqrt{(x-13)^2 + (y-0)^2} \quad \text{1M}$$

$$x^2 + y^2 - 8x - 12y + 52 = x^2 + y^2 - 26x + 169 \quad \text{1A}$$

$$18x - 12y - 117 = 0$$

$$6x - 4y - 39 = 0 \quad \text{1A}$$

12. (a) $(x-7)^2 + (y+2)^2 = (4-7)^2 + (2+2)^2$ 1M

$(x-7)^2 + (y+2)^2 = 25$ 1A

(b) $GF = \sqrt{(7-2)^2 + (-2-10)^2} = 13$

C 的半徑 $= 5 < FG$ 1M

因此，F 在 C 外。 1A

(c) (i) Γ 為 GF 的垂直平分線。 1A

(ii) FG 的中點的坐標為 $\left(\dfrac{9}{2},\ 4\right)$。

所求距離 $= \sqrt{\left(\dfrac{9}{2} - 7\right)^2 + (4+2)^2} - 5$ 1M

$= \dfrac{3}{2}$ 1A

13. (a) (i) Γ 為 EF 的垂直平分線。 1A

(ii) 設 $(x,\ y)$ 為 P 的坐標。

$$\sqrt{(x-8)^2+(y+20)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y-4)^2} \qquad \text{1M}$$

$$x^2+y^2-16x+40y+464=x^2+y^2-4x-8y+20$$

$$x-4y-37=0 \qquad \text{1A}$$

(b) (i) 設 $(a,\ b)$ 為 H 的坐標。

$$\begin{cases} a-4b-37=0 \\ \dfrac{9-4}{5-2}\times\dfrac{b-4}{a-2}=-1 \end{cases} \qquad \text{1M}$$

$$\frac{5}{3}\times\frac{b-4}{(4b+37)-2}=-1 \qquad \text{1M}$$

$$b=-5$$

H 的坐標為 $(17,\ -5)$。 1A

(ii) C 的圓心為 GH 的中點。

圓心的坐標為 $(11,\ 2)$。 1A

半徑 $=\dfrac{GH}{2}=\dfrac{\sqrt{(17-5)^2+(9+5)^2}}{2}=\sqrt{85}$

E 至 C 的圓心的距離

$=\sqrt{(11-8)^2+(2+20)^2}$ 1M

$=\sqrt{493}$

$>\sqrt{85}$

E 在 C 外。。

同意該宣稱。 1A

14. (a) 設 S 的坐標為 $(x,\ y)$。

$$\sqrt{(x-18)^2+(y+70)^2}=\sqrt{(x+60)^2+(y+96)^2} \qquad \text{1M}$$

$$x^2+y^2-36x+140y+5224=x^2+y^2+120x+192y+12\,816$$

$$-156x-52y-7592=0$$

$$3x+y+146=0 \qquad 1$$

可得 S 在 $3x+y+146=0$ 上。

(b) (i) $130=\sqrt{(x-18)^2+(y+70)^2}$

$$16\,900=(x-18)^2+(-3x-146+70)^2 \qquad \text{1M}$$

$$0=10x^2+420x-10\,800$$

$x=-60$ 或 18（捨去）

S 的坐標為 $(-60,\ 34)$。 1A

(ii) T 的坐標為 $(0,\ -70)$。 1A

留意 Q、S 及 U 共線及 $QS:SU=130:60=13:6$。

設 U 的坐標為 $(a,\ b)$。

$$\frac{a+60}{-60-18}=\frac{6}{13} \quad \text{及} \quad \frac{b-34}{34+70}=\frac{6}{13} \qquad \text{1M}$$

$$a=-96 \qquad\qquad b=82$$

RT 的斜率 $=\dfrac{-70+96}{0+60}=\dfrac{13}{30}$ 1M

TU 的斜率 $=\dfrac{82+70}{-96-0}=-\dfrac{19}{12}$

RU 的斜率 $=\dfrac{82+96}{-96+60}=-\dfrac{89}{18}$

由於沒有兩個斜率的積為 -1，$\triangle RTU$ 中沒有直角。

不同意該宣稱。 1A