**REG-COT-2324-ASM-SET 3-MATH**
**建議題解**

**結構式試題**

1. (a) $a = \dfrac{(PQ)r}{2} + \dfrac{(QR)r}{2} + \dfrac{(PR)r}{2}$ 1M

$= \dfrac{r}{2}(PQ + QR + PR)$

$= \dfrac{pr}{2}$ 1

(b) $AB = \sqrt{(9-2)^2 + (18+6)^2} = 25$、$BC = \sqrt{32^2 + 24^2} = 40$ 及 $AC = 39$。

設 $\triangle ABC$ 的內切圓的半徑為 $r$。

$\dfrac{(41-2)(18+6)}{2} = \dfrac{(25+40+39)r}{2}$ 1M

$r = 9$ 1A

所求 $y$ 坐標 $= -6 + 9 = 3$ 1A

2. (a) $PB = PD$ 及 $\angle PBD = \dfrac{180° - x}{2} = 90° - \dfrac{x}{2}$ 1M

$\angle BAD = \angle PBD = 90° - \dfrac{x}{2}$ 1A

$\angle ABC = 90°$

$\angle AQB = 180° - 90° - \left(90° - \dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{x}{2}$ 1A

(b) (i) 由於 $PB = PD = PR$，可得 $\angle BRD = \angle PDR$。 1M

$\angle BRD + \angle PDR = x$

$\angle BRD = \dfrac{x}{2}$ 1A

(ii) 留意 $\angle BRD = \angle BQD = \dfrac{x}{2}$。

$B$、$D$、$Q$、$R$ 共圓。 1M

由於 $PB = PD = PR$，$P$ 為圓 $BDR$ 的圓心，即圓 $BDQR$ 的圓心。

因此，$P$ 為 $\triangle BDQ$ 的外接圓的圓心。

同意該宣稱。 1A

3. (a) $\angle BPA = 90^\circ$ （已知）

$\angle GMA = 90^\circ$ （外心性質）

$= \angle BPA$

$BC // GM$ （同位角相等）

$\angle BDC = \angle MDG$ （對頂角）

$\angle CBD = \angle GMD$ （錯角，$BC // GM$）

$\triangle BCD \sim \triangle MGD$ （AA）

| 評分標準 | | |
|---|---|---|
| **情況 1** | 附有正確理由的任何正確證明。 | 3 |
| **情況 2** | 未附有理由的任何正確證明。 | 2 |
| **情況 3** | 附有一正確理由和一正確步驟之未完整的證明。 | 1 |

(b) (i) $GM = \sqrt{r^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{4r^2 - a^2}$ 1A

$G$ 的坐標為 $\left(\dfrac{a}{2}, \dfrac{\sqrt{4r^2 - a^2}}{2}\right)$。

$$BG = r$$

$$\left(\frac{a}{2} - b\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{4r^2 - a^2}}{2} - h\right)^2 = r^2$$ 1M

$$\left(\frac{\sqrt{4r^2 - a^2}}{2} - h\right)^2 = r^2 - \frac{(a - 2b)^2}{4}$$

由於 $h > GM > 0$，$\dfrac{\sqrt{4r^2 - a^2}}{2} - h < 0$。

$$\frac{\sqrt{4r^2 - a^2}}{2} - h = -\sqrt{r^2 - \frac{(a - 2b)^2}{4}}$$

$$h = \frac{\sqrt{4r^2 - a^2}}{2} + \frac{\sqrt{4r^2 - (a - 2b)^2}}{\sqrt{4}}$$

$$= \frac{\sqrt{4r^2 - a^2 + 4ab - 4b^2} + \sqrt{4r^2 - a^2}}{2}$$ 1

(ii) $BD : DM = 2 : 1$ 1A

$BC : GM = BD : DM = 2 : 1$ 及 $BC = 2GM = \sqrt{4r^2 - a^2}$ 1M

$CP = h - \sqrt{4r^2 - a^2} = \dfrac{\sqrt{4r^2 - a^2 + 4ab - 4b^2} - \sqrt{4r^2 - a^2}}{2}$

（$AB$ 的斜率）×（$OC$ 的斜率）

$= \dfrac{h - 0}{b - a} \times \dfrac{CP}{b}$ 1M

$= \dfrac{1}{4b(b - a)}\left[(\sqrt{4r^2 - a^2 + 4ab - 4b^2})^2 - (\sqrt{4r^2 - a^2})^2\right]$

$= \dfrac{4b(a - b)}{4b(b - a)}$

$= -1$

由於 $BC \perp OA$ 及 $OC \perp AB$，$C$ 為 $\triangle OAB$ 的垂心。 1

(iii) $h = \dfrac{\sqrt{4r^2 - a^2 + 4ab - 4b^2} + \sqrt{4r^2 - a^2}}{2} = 49$

$CP = h - \sqrt{4r^2 - a^2} = 31$

$D$ 的 $x$ 坐標 $= \dfrac{2\left(\frac{80}{2}\right) + 31}{1 + 2} = 37$ 1M

所求面積 $= \dfrac{(40 - 31)(49)}{2} - \dfrac{(49 - 31)(37 - 31)}{2}$

$= \dfrac{333}{2}$ 1A

4. (a) $\angle PGT = \angle QGT$ （切線性質）

$PR = QR$ （對角對等弦）

$\angle RQP = \angle RPQ$ （等腰 △ 底角）

$\angle RQT = \angle RPQ$ （交錯弓形的圓周角）

$= \angle RQP$

因此，$QR$ 為 $\angle PQT$ 的角平分線。

| **評分標準** | | |
|---|---|---|
| **情況 1** | 附有正確理由的任何正確證明。 | 3 |
| **情況 2** | 未附有理由的任何正確證明。 | 2 |
| **情況 3** | 附有一正確理由和一正確步驟之未完整的證明。 | 1 |

(b) (i) 斜率 $= \dfrac{7 + 68}{12 + 88} = \dfrac{3}{4}$

所求方程為

$$y - 7 = \frac{3}{4}(x - 12)$$

$$3x - 4y - 8 = 0$$ 1A

(ii) 留意 $GT$ 為 $\angle PTQ$ 的角平分線。

$\triangle PQT$ 的內心為 $R$。 1M

$GR = GQ = 7 + 68 = 75$

$GT = \sqrt{(12 + 88)^2 + (6 + 68)^2} = 125$

可得 $GR : RT = 75 : (125 - 75) = 3 : 2$。

設 $R$ 的坐標為 $(a,\ b)$。

$\dfrac{12 - a}{a + 88} = \dfrac{3}{2}$ 及 $\dfrac{7 - b}{b + 68} = \dfrac{3}{2}$ 1M

$a = -48$ $b = -38$

$\triangle PQT$ 的內心的坐標為 $(-48,\ -38)$。 1A

(iii) 假定 $\triangle PQT$ 的內切圓與 $QT$ 相切於 $U$。

$\triangle PQT$ 的內切圓的半徑

$= RU$

$= -38 + 68$ 1M

$= 30$

留意 $GPTQ$ 為圓內接四邊形。

$\triangle PQT$ 的外接圓通過 $G$。

$\triangle PQT$ 的外接圓的半徑

$= \dfrac{GT}{2}$ 1M

$= \dfrac{125}{2}$

所求之比

$= 2(30)\pi : 2\left(\dfrac{125}{2}\right)\pi$

$= 12 : 25$

$\neq 1 : 2$

不同意該宣稱。 1A

5. (a) $C$ 的方程為 $(x+6)^2+(y-4)^2=r^2$。 1A

$$\left(\frac{14+ky}{4}+6\right)^2+(y-4)^2=r^2$$

$$\left(\frac{k^2}{16}+1\right)y^2+\left(\frac{19k}{4}-8\right)y+\frac{425}{4}-r^2=0$$

$$(k^2+16)y^2+4(19k-32)y+1700-16r^2=0$$

$L$ 為 $C$ 的切線。

$$[4(19k-32)]^2-4(k^2+16)(1700-16r^2)=0$$ 1M

$$r^2=\frac{1700}{16}-\frac{(19k-32)^2}{4(k^2+16)}$$

$$=\frac{(4k+38)^2}{k^2+16}$$ 1A

(b) (i) $E$ 的坐標為 $(-4,\ -10)$。 1A

$L$ 通過點 $D$。

$$4(8)-k(6)-14=0$$

$$k=3$$

設 $F$ 的坐標為 $(a,\ b)$。

$$DF=EF$$

$$\sqrt{(a-8)^2+(b-6)^2}=\sqrt{(a+4)^2+(b+10)^2}$$

$$-24a-32b-16=0$$

$$a=-\frac{4b}{3}-\frac{2}{3}$$

$G$ 為 $\triangle DEF$ 的外心。

$$GF=GD$$

$$\sqrt{(a+6)^2+(b-4)^2}=\sqrt{(8+6)^2+(6-4)^2}$$ 1M

$$\left(-\frac{4b}{3}-\frac{2}{3}+6\right)^2+(b-4)^2=200$$

$$\frac{25b^2}{9}-\frac{200b}{9}-\frac{1400}{9}=0$$

$$b=4\pm 6\sqrt{2}$$

$F$ 的坐標為 $\left(-6+8\sqrt{2},\ 4-6\sqrt{2}\right)$ 或 $\left(-6-8\sqrt{2},\ 4+6\sqrt{2}\right)$。 1A

(ii) $L$ 為 $\triangle DFH$ 的內切圓的切線。

利用 (a)，若 $G$ 為內心，則 $r^2 = \dfrac{[4(3) + 38)^2]}{3^2 + 16} = 100$。 1M

該內切圓的半徑為 10。

設 $K$ 為內切圓與 $L$ 的切點。

$$\sin \angle GDK = \frac{r}{DG}$$ 1M

$$\angle GDK = 45^\circ$$

留意 $E$ 在 $L$ 上，可得 $\angle FDH = \angle FDE$。

$EF$ 的中點的坐標為 $\left(-5 + 4\sqrt{2},\ -3 - 3\sqrt{2}\right)$ 或 $\left(-5 - 4\sqrt{2},\ -3 + 3\sqrt{2}\right)$。

以上與 $G$ 的坐標不相符。

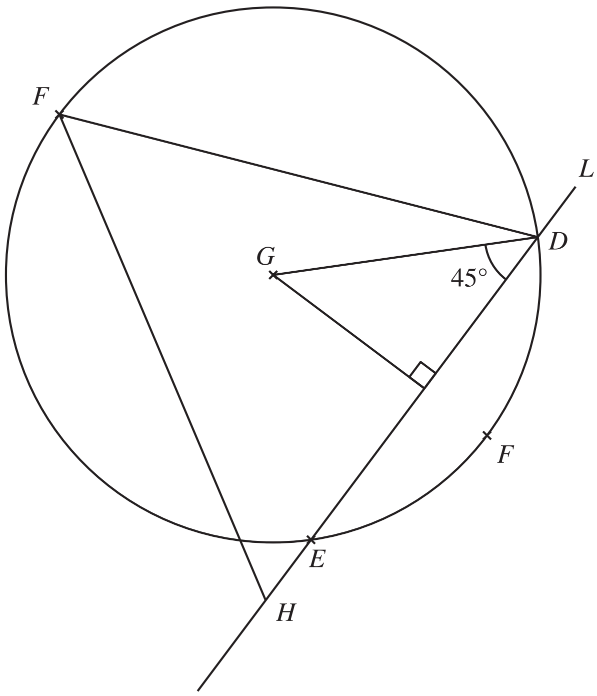
$EF$ 不是圓 $DEF$ 的直徑。

由此，$\angle FDE \neq 90^\circ$ 及 $\angle FDH = \angle FDE \neq 90^\circ$。 1M

可得 $\angle FDH \neq 2\angle GDK$ 及 $DG$ 不是 $\angle FDH$ 的角平分線。

$G$ 不是 $\triangle DFH$ 的內心。

不同意該宣稱。 1A



6. (a) $f(-2) = k(-2)^2 + (2k-2)(-2) - 4$

$= 4k - 4k + 4 - 4$

$= 0$

$y = f(x)$ 的圖像通過 $A$。 1

(b) (i) $f(x) = kx^2 + (2k-2)x - 4$

$= k\left[x - 2(x)\left(\frac{1-k}{k}\right) + \left(\frac{1-k}{k}\right)^2\right] - \frac{(k+1)^2}{k}$ 1M

$= k\left[x - \frac{1-k}{k}\right]^2 - \frac{(k+1)^2}{k}$

$Q$ 的坐標為 $\left(\frac{1-k}{k},\ -\frac{(k+1)^2}{k}\right)$。 1A

(ii) $C$ 的坐標為 $(0,\ -4)$。 1A

設 $R$ 的坐標為 $\left(\frac{1-k}{k},\ r\right)$，其中 $r$ 為一常數。 1M

$$RA = RC$$

$$\sqrt{\left(\frac{1-k}{k} + 2\right)^2 + r^2} = \sqrt{\left(\frac{1-k}{k}\right)^2 + (r+4)^2} \quad \text{1M}$$

$$\left(\frac{1-k}{k}\right)^2 + 4\left(\frac{1-k}{k}\right) + 4 + r^2 = \left(\frac{1-k}{k}\right)^2 + r^2 + 8r + 16$$

$$4\left(\frac{1-k}{k}\right) - 12 = 8r$$

$$r = \frac{1-4k}{2k} \quad \text{1A}$$

$R$ 的坐標為 $\left(\frac{1-k}{k},\ \frac{1-4k}{2k}\right)$。

(iii) 可得 $\angle RCQ = 90°$。

$$\frac{\frac{1-4k}{2k} + 4}{\frac{1-k}{k} - 0} \times \frac{-\frac{(k+1)^2}{k} + 4}{\frac{1-k}{k} - 0} = -1 \quad \text{1M+1M}$$

$$\frac{1+4k}{2k} \times \frac{-k^2 + 2k - 1}{k} = -\left(\frac{1-k}{k}\right)^2$$

$$\frac{1+4k}{2k} \times \frac{(k-1)^2}{k} = \frac{(1-k)^2}{k^2}$$

$$1 + 4k = 2$$

$$k = \frac{1}{4} \quad \text{1A}$$

$R$ 的坐標為 $(3,\ 0)$。

所求面積 $= AR^2\pi$

$= (3+2)^2\pi$

$= 25\pi$ 1A