REG-NSCN-2324-ASM-SET 3-MATH

建議題解

多項選擇題

1. D	2. A	3. A	4. C	5. B
6. D	7. D	8. A	9. A	10. A
11. B	12. B	13. C	14. B	15. D
16. D	17. B	18. B	19. A	20. C
21. A	22. A	23. A	24. C	25. A
26. C	27. A	28. B	29. C	30. A

1. $\boxed{\text{D}}$

$(i^3)^5 = i^{15} = (i^4)^3 i^3 = i^3 = -i$

2. $\boxed{\text{A}}$

$i + 2i^2 + 3i^3 + 4i^4 = i - 2 - 3i + 4 = 2 - 2i$。
實部為 2。

3. $\boxed{\text{A}}$

代 $\beta = 1$，利用計數機 CMPLX 模式，$i^3(\beta i - 3) = i^3(i - 3) = 1 + 3i$。
只有選項 A 滿足結果。

4. $\boxed{\text{C}}$

$$\frac{a+bi}{a-bi} = i$$
$$a + bi = i(a - bi)$$
$$a + bi = b + ai$$
可得 $b = a$。

5. $\boxed{\text{B}}$

$$\begin{aligned}(3 + 5i) + (-2 + 6i) - (7 - 2i) &= (3 - 2 - 7) + (5 + 6 + 2)i \\ &= -6 + 13i\end{aligned}$$

6. $\boxed{\text{D}}$

$$\begin{aligned}i^3(\alpha + 4i) &= (-i)(\alpha + 4i) \\ &= -\alpha i - 4i^2 \\ &= 4 - \alpha i\end{aligned}$$

7. $\boxed{\text{D}}$

利用計算機 CMPLX 模式，$\dfrac{1}{i-2} = -\dfrac{2}{5} - \dfrac{1}{5}i$。

8. $\boxed{\text{A}}$

利用計算機，$\dfrac{5}{2-i} = 2 + i$。

9. $\boxed{\text{A}}$

$$\begin{aligned}(3+2i)z &= 22 - 7i \\ z &= \frac{22-7i}{3+2i} \\ &= 4 - 5i\end{aligned}$$

10. $\boxed{\text{A}}$

利用計算機 CMPLX 模式，

$$(4+i) + \frac{5-3i}{3+4i} = \frac{103}{25} - \frac{4}{25}i$$

11. $\boxed{\text{B}}$

利用計數機 CMPLX 模式，$\dfrac{4-i}{2+i} = \dfrac{7}{5} - \dfrac{6}{5}i$。

12. $\boxed{\text{B}}$

利用計算機 CMPLX 模式，$\dfrac{1+3i}{3-i} = i$。

13. $\boxed{\text{C}}$

$z = (a+5)i^6 + (a-3)i^7 = -(a+5) - (a-3)i$ 為一實數。

$$\begin{aligned}-(a-3) &= 0 \\ a &= 3\end{aligned}$$

14. $\boxed{\text{B}}$

利用計數機 CMPLX 模式，$\dfrac{5}{2-i} = (2+i)$。

$\dfrac{5}{2-i} + ki = 2 + (k+1)i$ 為一實數。

$$\begin{aligned}k + 1 &= 0 \\ k &= -1\end{aligned}$$

15. $\boxed{\text{D}}$

$$\begin{aligned}&\frac{4i^{2020} + 5i^{2019} + 6i^{2018} + 7i^{2017} + 8i^{2016}}{1+i} \\ &= \frac{4 + 5i^3 + 6i^2 + 7i + 8}{1+i} \\ &= \frac{6+2i}{1+i} \\ &= 4 - 2i\end{aligned}$$

虛部 $= -2$

16. $\boxed{\text{D}}$

利用計數機 CMPLX 模式，$\dfrac{2i^{12}+3i^{13}+4i^{14}+5i^{15}+6i^{16}}{1-i} = \dfrac{2+3i+(-4)+(-5i)+6}{1-i} = 3+i$。

實部為 3。

17. $\boxed{\text{B}}$

$$\begin{aligned}\frac{6i^6+7i^7+8i^8+9i^9+10i^{10}}{1+i} &= \frac{-6-7i+8+9i-10}{1+i}\\ &= -3+5i\end{aligned}$$

實部為 -3。

18. $\boxed{\text{B}}$

當 $k=1$，

$$\begin{aligned}\frac{16k-4i}{-2i}-\frac{9i+3k}{3i} &= \frac{16-4i}{-2i}-\frac{9i+3}{3i}\\ &= -1+9i\end{aligned}$$

只有選項 B 在 $k=1$ 時得出 $-1+9i$。

19. $\boxed{\text{A}}$

$$\begin{aligned}5k-\frac{3+9ki}{i} &= 5k-\frac{3}{i}-9k\\ &= -4k+3i\end{aligned}$$

20. $\boxed{\text{C}}$

代 $k=1$，利用計算機 CMPLX 模式，

$$\frac{5k+10i}{1-2i}=\frac{5+10i}{1-2i}=-3+4i$$

虛部 = 4

只有選項 C 在當 $k=1$ 時可得 4。

21. $\boxed{\text{A}}$

代 $\beta=1$，利用計數機 CMPLX 模式，$\dfrac{\beta^2+4}{\beta+2i}=\dfrac{1+4}{1+2i}=1-2i$。

只有選項 A 滿足結果。

22. $\boxed{\text{A}}$

設 $\alpha=1$。利用計數機 CMPLX 模式，$\dfrac{\alpha^2+9}{\alpha-3i}=1+3i$。

只有選項 A 符合答案。

23. $\boxed{\text{A}}$

$$\frac{bi}{2+3i} = a - 2i$$

$$\begin{aligned} bi &= (2+3i)(a-2i) \\ &= (2a+6) + (3a-4)i \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 2a+6=0 \\ 3a-4=b \end{cases}$$

求解後，$a = -3$ 及 $b = -13$。

24. $\boxed{\text{C}}$

$$\begin{aligned} \frac{3+5ki}{i} - 2i &= \frac{3}{i} + 5k - 2i \\ &= -3i + 5k - 2i \\ &= 5k - 5i \end{aligned}$$

25. $\boxed{\text{A}}$

$$\begin{aligned} 2k - \frac{5+ki}{i} &= 2k - \frac{(5+ki)(i)}{i^2} \\ &= 2k + (5i + ki^2) \\ &= k + 5i \end{aligned}$$

26. $\boxed{\text{C}}$

$$\frac{3+ai}{2-i} = 2 - bi$$

$$\begin{aligned} 3+ai &= (2-bi)(2-i) \\ &= (4-b) + (-2b-2)i \end{aligned}$$

比較實部，

$$\begin{aligned} 3 &= 4 - b \\ b &= 1 \end{aligned}$$

27. $\boxed{\text{A}}$

當 $k = 1$，

$$\begin{aligned} \frac{3k}{2i} - i\left(\frac{1}{2}k - 3i\right) &= \frac{3}{2i} - i\left(\frac{1}{2} - 3i\right) \\ &= -3 - 2i \end{aligned}$$

只有選項 A 在當 $k = 1$ 時得出 $-3 - 2i$。

28. $\boxed{\text{B}}$

I. ✗。若 $a = \pi$，$uv = \dfrac{49}{a^2+1}$ 為無理數。

II. ✓。$u = \dfrac{7(a-i)}{a^2+1} = \dfrac{7a}{a^2+1} - \dfrac{7}{a^2+1}i$ 與 $v = \dfrac{7(a+i)}{a^2+1} = \dfrac{7a}{a^2+1} + \dfrac{7}{a^2+1}i$ 有相等實部。

III. ✗。取 $a = 1$，利用計數機 CMPLX 模式，$\dfrac{1}{u} = \dfrac{1}{7} + \dfrac{1}{7}i$ 及 $\dfrac{1}{v} = \dfrac{1}{7} - \dfrac{1}{7}i$。
它們的虛部不相等。

29. $\boxed{\text{C}}$

留意 $z_1 - z_2$ 為一實數。設 $z_1 - z_2 = r$，其中 r 為一實數。

$$\frac{2+ki}{1+i} - \frac{k+5i}{2-i} = r$$
$$(2+ki)(2-i) - (k+5i)(1+i) = r(1+i)(2-i)$$
$$[(4+k)+(2k-2)i] - [(k-5)+(5+k)i] = r(3+i)$$
$$9 + (k-7)i = 3r + ri$$

比較實部，

$$3r = 9$$
$$r = 3$$

30. $\boxed{\text{A}}$

$$\frac{k+10i}{3+4i} + \frac{k-i}{2+3i} = \frac{(k+10i)(3-4i)}{3^2+4^2} + \frac{(k-i)(2-3i)}{2^2+3^2}$$
$$= \frac{(3k+40)+(30-4k)i}{25} + \frac{(2k-3)+(-3k-2)i}{13}$$

$z_1 + z_2$ 為純虛數。

$$\frac{3k+40}{25} + \frac{2k-3}{13} = 0$$
$$k = -5$$

$z_1 + z_2 = \dfrac{50i}{25} + \dfrac{13i}{13} = 3i$
虛部為 3。

結構式試題

31. (a) 設 $z = a + bi$。

$$z + i = a + bi + i = a + (b + 1)i$$

由於 $z + i$ 為實數，$b + 1 = 0$，即 $b = -1$。 1M+1A

$$(1 - 2i)z = (1 - 2i)(a - i) = (a - 2) - (2a + 1)i$$

由於 $(1 - 2i)z$ 為純虛數，$a = 2$。

因此，$z = 2 - i$。 1A

(b) $\left[\dfrac{(1 - 2i)z}{5}\right]^{2014} = \left(\dfrac{-5i}{5}\right)^{2014}$

$= (-i)^{2014}$

$= i^{2012}i^2$ 1M

$= -1$ 1A

32. (a) $\dfrac{1 + 5i}{1 - 5i} = \dfrac{1 + 5i}{1 - 5i} \times \dfrac{1 + 5i}{1 + 5i}$ 1M

$= \dfrac{1 + 10i - 25}{1^2 + 5^2}$

$= -\dfrac{12}{13} + \dfrac{5}{13}i$ 1A

(b) $2m + \dfrac{1 + 5i}{1 - 5i} = n - mi$

$2m - \dfrac{12}{13} + \dfrac{5}{13}i = n - mi$

所以，$2m - \dfrac{12}{13} = n$ 及 $\dfrac{5}{13} = -m$。 1M

求解後，可得 $m = -\dfrac{5}{13}$ 及 $n = -\dfrac{22}{13}$。 1A

33. $(1 + i)^2 + a(1 + i) + b = 0$ 1M

$(1 + 2i - 1) + a + ai + b = 0$

$(a + b) + (a + 2)i = 0$

所以，$\begin{cases} a + b = 0 \\ a + 2 = 0 \end{cases}$。 1M

求解後，可得 $a = -2$ 及 $b = 2$。 1A

34. (a) $\dfrac{3+6i}{2-i} = \dfrac{3+6i}{2-i} \times \dfrac{2+i}{2+i}$ 1M

$= \dfrac{6+12i+3i+6i^2}{2^2-i^2}$

$= \dfrac{6-6+15i}{4+1}$

$= 0+3i$ 1A

(b) $(3i)^4 - 2(3i)^3 + 3(3i)^2 - p(3i) + 9q = 0$ 1M

$81 + 54i - 27 - 3pi + 9q = 0$

$(54+9q) + (54-3p)i = 0$

所以，$\begin{cases} 54+9q=0 \\ 54-3p=0 \end{cases}$。 1M

因此，$p = 18$ 及 $q = -6$。 1A

35. (a) $\dfrac{3+9i}{3-i} = \dfrac{3+9i}{3-i} \times \dfrac{3+i}{3+i}$ 1M

$= \dfrac{9+3i+27i+9i^2}{3^2-i^2}$

$= \dfrac{9-9+30i}{9+1}$

$= \dfrac{30i}{10}$

$= 0+3i$ 1A

(b) 代 $x = 3i$，

$(3i)^4 + (3i)^3 + (3i)^2 + a(3i) + 6b = 0$ 1M

$81i^4 + 27i^3 + 9i^2 + 3ai + 6b = 0$

$81 - 27i - 9 + 3ai + 6b = 0$

$72 + 6b + (3a-27)i = 0$

故此，$\begin{cases} 72+6b=0 \\ 3a-27=0 \end{cases}$。 1M

因此，$b = -12$ 及 $a = 9$。 1A