

REG-COT-2324-ASM-SET 1-MATH

建議題解

多項選擇題

- | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1. B | 2. C | 3. D | 4. C | 5. B |
| 6. C | 7. B | 8. A | 9. D | 10. A |
| 11. A | 12. C | 13. A | 14. A | 15. B |
| 16. B | 17. D | 18. D | 19. D | 20. D |
| 21. D | 22. C | 23. B | 24. C | 25. A |
| 26. B | 27. D | 28. D | 29. D | 30. A |

1. B

- I. ✗。垂心在 B 。
- II. ✓。形心永遠在三角形內。
- III. ✗。內心永遠在三角形內。

2. C

不包含任何步驟。

3. D

- I. ✓。 AD 為 BC 的垂直平分線。
- II. ✓。 AD 為通過 A 的高線。
- III. ✓。 AD 為通過 A 的中線。

4. C

I 為 $\triangle QRS$ 的內心。

$$\angle IRQ = \angle IRS = 12^\circ$$

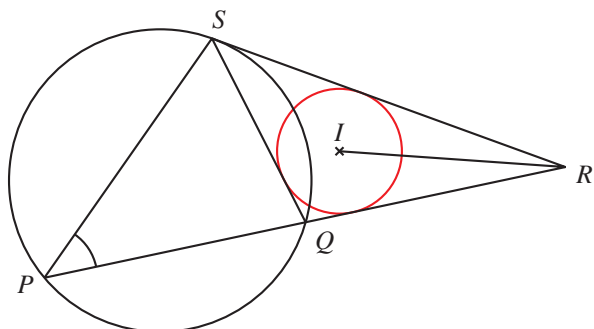
$$\angle SRQ = 12^\circ + 12^\circ = 24^\circ$$

$$\angle QPS = \angle SQR$$

在 $\triangle PSR$ 中，

$$70^\circ + 2\angle QPS + 24^\circ = 180^\circ$$

$$\angle QPS = 43^\circ$$



5. B

$$BC = 2BL = 26 \text{ cm}$$

$$AB = 2BN = 10 \text{ cm}$$

$$AC = 2CM = 24 \text{ cm}$$

由於 $10^2 + 24^2 = 26^2$ ， $\angle BAC = 90^\circ$ 。

$$\text{所求面積} = \frac{(10)(24)}{2} = 120 \text{ cm}^2$$

6. C

設圓心為 O 。

BO 為 $\triangle ABC$ 的中線。故此， BEO 為一直線。

$$\angle BAC = \angle ABE = 27^\circ$$

$$\angle CBD = \angle BAC = 27^\circ$$

$$\angle ABC = 90^\circ$$

在 $\triangle ABD$ 中，

$$x + 27^\circ + (90^\circ + 27^\circ) = 180^\circ$$

$$x = 36^\circ$$

7. B

設 $AC = 2$ 。則 $BC = 2$ 、 $CD = 1$ 及 $AE = \frac{AB}{2} = \sqrt{2}$ 。

留意 $CE \perp AB$ ， $\angle ACE = \sin^{-1} \frac{\sqrt{2}}{2} = 45^\circ$ 。

$$\angle CAD = \tan^{-1} \frac{1}{2} \approx 26.6^\circ$$

$$\theta = 180^\circ - 45^\circ - \tan^{-1} \frac{1}{2} \approx 108^\circ$$

$$\sin \theta \approx 0.948683.$$

藉檢查所有選項，可得 $\sin \theta = \frac{3\sqrt{10}}{10}$ 。

8. A

I. $\checkmark$ 。設 $\triangle ABC$ 的內切圓的半徑為 r 。

兩隻角均等於 $\tan^{-1} \frac{OV}{r}$ 。

II. $\checkmark$ 。設外接圓 ABC 的半徑為 R 。

則 $OB = OC = R$ ，兩隻角均等於 $\tan^{-1} \frac{OV}{R}$ 。

III. $\times$ 。若 $\angle ABC = 90^\circ$ ，則點 O 與 B 重合。

平面 VAB 與平面 ABC 之間的角為 90° ，而平面 VAC 與平面 ABC 之間的角不等於 90° 。

9. [D]

外心的 y 坐標 = $\frac{(-2) + (8)}{2} = 3$
 設外心的坐標為 $(h, 3)$ 。

$$\sqrt{(h-2)^2 + (3-8)^2} = \sqrt{(h-10)^2 + (14-3)^2}$$

$$h^2 - 4h + 29 = h^2 - 20h + 221$$

$$16h = 192$$

$$h = 12$$

外心的 x 坐標為 12。

10. [A]

點 B 可藉將 A 繞原點逆時針旋轉 90° 得出。故此， $\angle AOB = 90^\circ$ 。

外心為 AB 的中點，所求的 y 坐標 = $\frac{8-2}{2} = 3$

11. [A]

由於 AB 平行於 y 軸，通過 O 的高線平行於 x 軸。

設垂心 H 的坐標為 $(x, 0)$ 。由於 $AH \perp OB$ ，

$$\frac{12-0}{16-x} \times \frac{-12-0}{16-0} = -1$$

$$x = 7$$

12. [C]

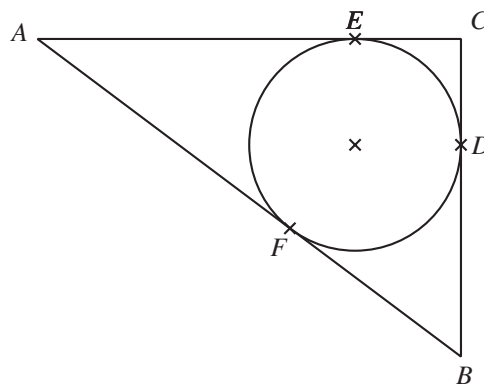
設 D 、 E 、 F 分別為內切圓與 BC 、 AC 、 AB 的切點。

設 $CE = x$ 。則 $AE = 12 - x$ 、 $CD = x$ 及
 $BD = 5 - x$ 。

利用切線性質， $AF = 12 - x$ 及 $BF = 5 - x$ 。

由於 $AB = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$ ，可得 $x = 2$ 。

因此，內心的坐標為 $(10, 3)$ 。



13. [A]

外心在 OA 的垂直平分線上。

外心的 y 坐標 = $\frac{0+12}{2} = 6$

14. A

通過 Q 的高線為水平線。

垂心的 y 坐標 = 48

設垂心的坐標為 $(x, 48)$ 。

$$\frac{48-0}{x-0} \times \frac{60-48}{0-96} = -1$$

$$x = 6$$

15. B

留意 $\angle BAC = 90^\circ$ 。

I. ✗。外心在 BC 的中點。

II. ✓。根據對稱性質，形心的 x 坐標為 1。

III. ✓。垂心在 A （直角三角形）。

16. B

三角形的頂點的坐標為 $(0, 0)$ 、 $(6, 0)$ 及 $(0, 8)$ 。

設內切圓的半徑為 r 。

藉考慮三角形的面積，

$$\frac{(6)(8)}{2} = \frac{(6)(r)}{2} + \frac{(8)(r)}{2} + \frac{(\sqrt{6^2 + 8^2})(r)}{2}$$

$$r = 2$$

內心的坐標為 $(2, 2)$ 。

17. D

將內心記為 X 。

設 D 、 E 及 F 分別為 OA 、 OB 及 AB 上的點使得 $XD \perp OA$ 、 $XE \perp OB$ 及 $XF \perp AB$ 。

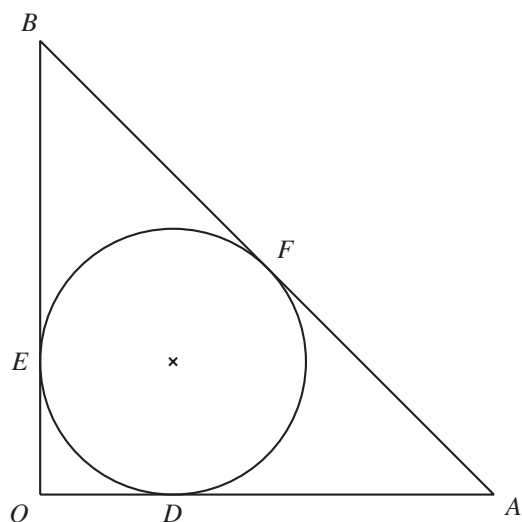
設半徑為 r 。

$OD = OE = r$ 。

$AD = AF = 6 - r$ 及 $BE = BF = 6 - r$ 。

$$(6-r) + (6-r) = \sqrt{6^2 + 6^2}$$

$$r = 6 - 3\sqrt{2}$$



18. D

通過 B 的高線為鉛垂線。

垂心的 x 坐標為 24。

設垂心的坐標為 $(24, y)$ 。

$$\frac{y-0}{24-0} \times \frac{18-0}{24-48} = -1$$

$$y = 32$$

19. D

由於 OA 為鉛垂線，垂心在通過 B 的水平線上。

因此，垂心的 y 坐標 = -12 。

設垂心 H 的坐標為 $(x, -12)$ 。由於 $AH \perp BO$ ，

$$\frac{36+12}{0-x} \times \frac{12}{16} = -1$$

$$x = 36$$

20. D

設 $H(h, k)$ 為垂心。

$$\begin{array}{ccc} AH \perp BC & \text{及} & BH \perp AC \\ \frac{k+19}{h+38} \times \frac{9+1}{-10+2} = -1 & & \frac{k-9}{h+10} \times \frac{-1+19}{-2+38} = -1 \\ \frac{k+19}{h+38} = \frac{4}{5} & & \frac{k-9}{h+10} = -2 \end{array}$$

求解後，可得 $h = -8$ 及 $k = 5$ 。

21. D

$$\text{頂點的 } x \text{ 坐標} = \frac{-k}{2(1)} = -\frac{k}{2}$$

$$PR \text{ 的中點} = \left(-\frac{k}{2}, 0\right)$$

考慮形心的 x 坐標，

$$-2 = \frac{0(1) + \left(-\frac{k}{2}\right)(2)}{1+2}$$

$$k = 6$$

22. C

設 Q 的坐標為 (p, q) 。將 $\triangle OPQ$ 的垂心記為 H 。

$$OP \perp QH \quad \text{及} \quad PH \perp OQ$$

$$\frac{-18}{26} \times \frac{q-21}{p+3} = -1 \quad \frac{-18+3}{26-21} \times \frac{q}{p} = -1$$

$$13p - 9q = 300 \quad p - 3q = 0$$

求解後，可得 $p = 30$ 及 $q = 10$ 。

因此， Q 的 y 坐標等於 10。

23. [B]

$\triangle OAB$ 為直角三角形。故此， $\triangle OAB$ 的垂心在 O 。

$$\triangle OAB \text{ 的面積} = \frac{1}{2}(12)(16) = 96$$

$AB = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20$ 。設所求距離為 d 。藉考慮 $\triangle OAB$ 的面積，

$$\frac{1}{2}(AB)(d) = 96$$

$$d = 9.6$$

24. [C]

直線 $x - 2y + 10 = 0$ 垂直於直線 $2x + y + a = 0$ 。

三條線形成的三角形為直角三角形。垂心在直角頂點。

當 $x = -6$ 時，

$$(-6) - 2y + 10 = 0$$

$$y = 2$$

代 $(-6, 2)$ 至 $2x + y + a = 0$ ，

$$2(-6) + (2) + a = 0$$

$$a = 10$$

25. [A]

$P\left(\frac{k}{2}, 0\right)$ 、 $Q(0, -k)$ 及 $R(0, k)$ 。

外心在 QR 的垂直平分線上，即 x 軸。

外心在 $(-3, 0)$ 。

$$\frac{k}{2} - (-3) = \sqrt{3^2 + k^2}$$

$$0 = \frac{3k^2}{4} - 3k$$

$$k = 4 \text{ 或 } 0$$

R 的 y 坐標 = 4

26. [B]

$A = \left(\frac{k}{3}, 0\right)$ 及 $B = \left(0, \frac{k}{4}\right)$

外心在 AC 的垂直平分線上。故此， $h = \frac{k + \frac{k}{3}}{2} = \frac{2k}{3}$ 。

外心與 B 及 A 等距，

$$\sqrt{\left(\frac{2k}{3} - k\right)^2 + 38^2} = \sqrt{\left(\frac{2k}{3}\right)^2 + \left(38 - \frac{k}{4}\right)^2}$$

$$-\frac{4k^2}{3} + k^2 = -19k + \frac{k^2}{16}$$

$$k = 48 \text{ 或 } 0 \text{ (捨去)}$$

故此， $h = \frac{2}{3} \times 48 = 32$ 。

27. D

外心與兩頂點等距。

$$\begin{aligned}\sqrt{(k+4)^2 + (-4+8)^2} &= \sqrt{(k-6)^2 + (-4-2)^2} \\ k^2 + 8k + 32 &= k^2 - 12k + 72 \\ k &= 2\end{aligned}$$

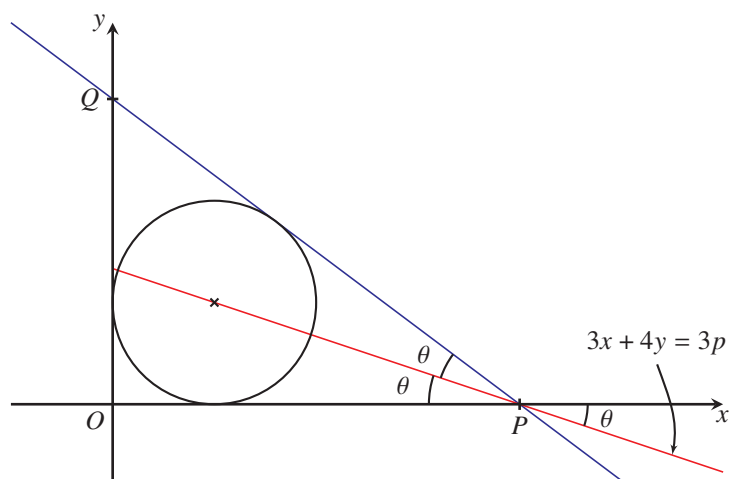
28. D

留意 $(p, 0)$ 滿足方程 $3x + 4y = 3p$ 。

直線 $3x + 4y = 3p$ 通過 $P(p, 0)$ 和 $\triangle OPQ$ 的內心。

故此，它是 $\angle OPQ$ 的角平分線。

設該直線與 x 軸之間的銳角為 θ 。



$$\begin{aligned}\text{直線的斜率} &= -\frac{3}{4} = -\tan \theta \quad \text{及} \quad \frac{OQ}{OP} = \tan 2\theta \\ \theta &= \tan^{-1} \frac{3}{4} \quad \frac{q}{p} = \frac{24}{7} \\ p : q &= 7 : 24\end{aligned}$$

29. D

直線 $5x + 4y = 4b$ 通過點 $B(0, b)$ 。

故此， $5x + 4y = 4b$ 通過 OA 的中點 $(\frac{a}{2}, 0)$ 。

$$\begin{aligned}5\left(\frac{a}{2}\right) + 0 &= 4b \\ \frac{a}{b} &= \frac{8}{5}\end{aligned}$$

30. A

I. ✓。 G 在 $\triangle OAB$ 內，即在第二象限內。 x 坐標與 y 坐標不相同（一正一負）。

II. ✓。設內切圓的半徑為 r 。則 G 的坐標為 $(-r, r)$ 。

$$4r + (-r) = 3kb$$

$$r = kb$$

利用切線性質， OB 被分成兩線段，長度為 $b - r$ 及 r 。

OA 被分成兩線段，長度為 $10 - r$ 及 r 。

$$(10 - r) + (b - r) = \sqrt{10^2 + b^2}$$

$$[10 + b(1 - 2k)]^2 = b^2 + 100$$

$$100 + 20b(1 - 2k) + b^2(1 - 2k)^2 = b^2 + 100$$

$$b^2(4k^2 - 4k) + 20b(1 - 2k) = 0$$

$$\begin{aligned} b &= -\frac{20(1 - 2k)}{4k^2 - 4k} \\ &= \frac{5(1 - 2k)}{k(1 - k)} \end{aligned}$$

$$\text{所求距離} = r = kb = \frac{5(1 - 2k)}{1 - k}$$

III. ✗。當 $k = \frac{1}{6}$ 時， $r = \frac{5(1 - 2k)}{1 - k} = 4$ 。
內切圓的方程為 $(x + 4)^2 + (y - 4)^2 = 4^2$ 。

$$(x + 4)^2 + (5 - 3x - 4)^2 = 16$$

$$10x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$\Delta = 2^2 - 4(10)(1) = -36 < 0$$

直線 $3x + y = 5$ 與 $\triangle OAB$ 的內切圓不相交，即不是切線。