REG-AOT-2324-ASM-SET 3-MATH

建議題解

多項選擇題

1. C	2. D	3. B	4. C	5. D
6. D	7. A	8. B	9. B	10. D
11. A	12. B	13. C	14. B	15. C
16. B	17. D	18. C	19. B	20. D
21. C	22. B	23. D	24. C	

1. $\boxed{\text{C}}$

設立方體的邊長為 2。M 及 N 分別為 BD 及 PQ 的中點。

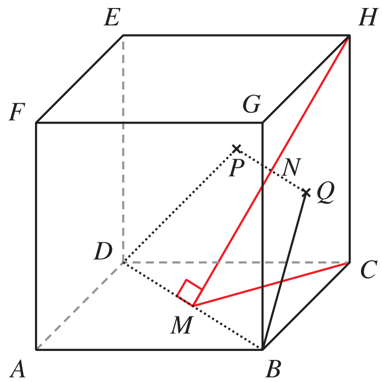
留意由於 D、P、H 共線，及 B、Q、H 共線。可得 M、N、H 共線。

留意 $MH \perp BD$ 及 $CM \perp BD$。

所求之角為 $\angle CMH$。

$CM = \dfrac{1}{2}\sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{2}$

$\angle CMH = \tan^{-1} \dfrac{2}{\sqrt{2}} \approx 55°$



2. $\boxed{\text{D}}$

設 E 為 AC 上的一點使得 $VE \perp AC$。

所求角為 $\angle VED$。

由於該錐體沿平面 VAC 對稱，

可得 $\angle VEB = \angle VED = \dfrac{180°}{2} = 90°$。

3. $\boxed{\text{B}}$

設 M 為 BC 上的點使得 $AM \perp BC$。

留意 AMD 為該四面體的對稱面，且垂直於平面 BCD。

可得 $\angle AMD = 80°$ 及所求之角為 $\angle ADM$。

考慮 $\triangle ABC$。

$AM = 56 \sin 60° = 28\sqrt{3}$ cm

考慮 $\triangle BCD$。

$DM = \sqrt{60^2 - 28^2} = \sqrt{2816}$ cm

考慮 $\triangle AMD$。

$AD^2 = AM^2 + DM^2 - 2(AM)(DM)\cos 80°$

$AD \approx 65.4$ cm

$AM^2 = AD^2 + DM^2 - 2(AD)(DM)\cos \angle ADM$

$\angle ADM \approx 47°$

4. $\boxed{\text{C}}$

設 M 及 N 分別為 AB 及 CD 的中點。

設 X 為 MN 的中點使得 VX 垂直於平面 $ABCD$。

可得 $\theta = \angle MVN$ 及 $\dfrac{\theta}{2} = \angle VNX$。

$DX = \dfrac{1}{2}\sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ cm

$VX = \sqrt{7^2 - DX^2} = 2\sqrt{11}$ cm

$$\begin{aligned} \tan\frac{\theta}{2} &= \frac{MX}{VX} \\ &= \frac{2}{2\sqrt{11}} \\ &= \frac{\sqrt{11}}{11} \end{aligned}$$

5. $\boxed{\text{D}}$

設 E 為 CD 上的一點使得 $BE \perp CD$。則 $\theta = \angle AEB$。

$CD = \sqrt{24^2 + 7^2} = 25$ cm。藉考慮 $\triangle BCD$ 的面積，

$$\begin{aligned} \frac{(25)(BE)}{2} &= \frac{(24)(7)}{2} \\ BE &= \frac{168}{25} \end{aligned}$$

$\tan\theta = \dfrac{7}{BE} = \dfrac{25}{24}$

6. $\boxed{\text{D}}$

設 D 為 BC 上的點使得 $PD \perp BC$。
所求之角為 $\angle ADP$。

$$BC = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5\text{ m}$$

$$\frac{(PD)(BC)}{2} = \frac{(PB)(PC)}{2}$$

$$PD = 2.4\text{ m}$$

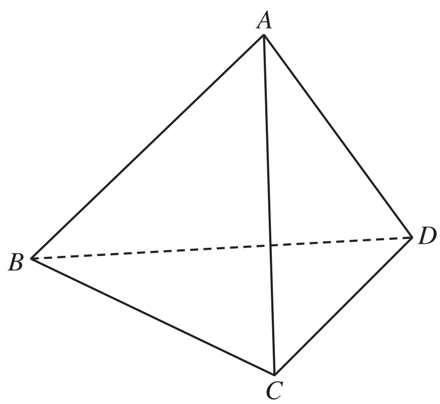
$$\tan\angle ADP = \frac{5}{2.4} = \frac{25}{12}$$

7. $\boxed{\text{A}}$

留意 $\alpha = \angle GFH = 45°$，$\beta = 90°$。
因此，$\alpha < 60° < \beta$。

8. $\boxed{\text{B}}$

參照下圖。設 E 為 BC 的中點，且每邊的長度為 x cm。



在 $\triangle AED$ 中，$AE = DE = x\sin 60° = \dfrac{\sqrt{3}x}{2}$ cm。

$$x^2 = AE^2 + DE^2 - 2(AE)(DE)\cos\angle AED$$

$$\angle AED = \cos^{-1}\frac{1}{3}$$

考慮該四面體的體積。

$$\frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{2}\sin 60°\right)(AE\sin\angle AED) = 576$$

$$x \approx 17.0$$

設 X 為 A 在 BCD 上的投影。
留意 D、X、E 共線。
考慮 $\triangle AXE$。
所求高度 $= AE\sin\angle AED$

$$\approx 13.9\text{ cm}$$

9. $\boxed{\text{B}}$

設 M 及 N 分別為 BC 及 AD 的中點。

所求角為 $\angle MVN$。

$MV = NV = \sqrt{8^2 - \left(\frac{4}{2}\right)^2} = \sqrt{60}\text{ cm}$

$$6^2 = MV^2 + NV^2 - 2(MV)(NV)\cos\angle MVN$$

$\angle MVN \approx 46°$

10. $\boxed{\text{D}}$

設 K 為 EG 上的一點使得 $AK \perp EG$。

所求角為 $\angle AKF$。

考慮 $\triangle EFG$ 的面積。

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(8)(6) &= \frac{1}{2}(EG)(FK)\\ 24 &= \frac{1}{2}\sqrt{8^2+6^2}(EK)\\ EK &= 4.8\text{ cm}\end{aligned}$$

$\tan\theta = \frac{12}{4.8}$

$\theta \approx 68°$

11. $\boxed{\text{A}}$

設 M 及 N 分別為 BD 及 AD 的中點。

所求之角為 $\angle MVN$。

$MV = NV = \sqrt{15^2 - 4^2} = \sqrt{209}\text{ cm}$

$MN = 6\text{ cm}$

$$MN^2 = MV^2 + NV^2 - 2(MV)(NV)\cos\angle MVN$$

$\angle MVN \approx 24°$

12. $\boxed{\text{B}}$

所求角為 $\angle CBH$ （或 $\angle DAE$）。

$\angle CBH = 45°$

13. $\boxed{\text{C}}$

$15^2 = 9^2 + 12^2 \quad \Rightarrow \quad \angle BDC = 90°$

由於 $\triangle ABD$ 為鉛垂及 CD 為水平，$AD \perp CD$。

故此，$\theta = \angle ADB = \tan^{-1}\frac{12}{9}$ 及 $\sin\theta = \frac{4}{5}$。

14. $\boxed{\text{B}}$

設 $BC = 1$。

$AE = BF = 1\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$AC = \frac{AE}{\sin 30°} = \sqrt{3}$

$\cos \angle ACB = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

15. $\boxed{\text{C}}$

設 K 為 AC 上的一點使得 $DK \perp AC$。

可得 $x = \angle DKE$。

考慮 $\triangle ACD$ 的面積。

$$\frac{(AD)(CD)}{2} = \frac{(AC)(DK)}{2}$$

$$\frac{(3)(4)}{2} = \frac{\sqrt{3^2 + 4^2}(DK)}{2}$$

$$DK = 2.4\text{ cm}$$

考慮 $\triangle DKE$。

$$\begin{aligned}\tan x &= \frac{DE}{DK}\\ &= \frac{2}{2.4}\\ &= \frac{5}{6}\end{aligned}$$

16. $\boxed{\text{B}}$

留意 $\angle BCT = \angle BCA = 90°$。

可得 BC 垂直於平面 ACT。

設 D 為 AT 上的一點使得 $CD \perp AT$。

則 $\theta = \angle BDC$。

考慮 $\triangle ACT$ 的面積。

$$\frac{(40)(30)}{2} = \frac{\sqrt{40^2 + 30^2}(CD)}{2}$$

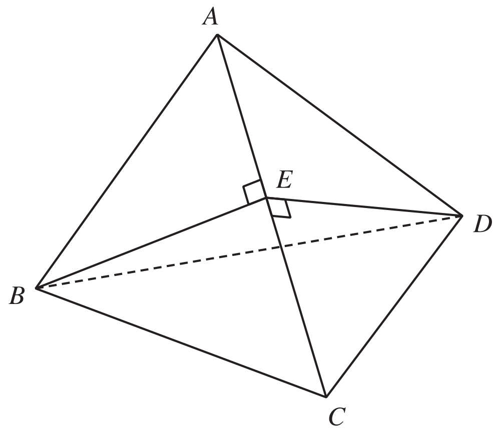
$$CD = 24\text{ cm}$$

考慮 $\triangle BCD$。

$$\begin{aligned}\tan \theta &= \frac{20}{24}\\ &= \frac{5}{6}\end{aligned}$$

17. $\boxed{\text{D}}$

由於 $BE \perp AC$ 及 $DE \perp AC$，所求之角為 $\angle BED$。



18. $\boxed{\text{C}}$

設每邊的長度為 2。設 K 為 BV 上的一點使得 $AK \perp BV$ 及 $CK \perp BV$。
$AK = CK = 2\sin 60° = \sqrt{3}$ 及 $AC = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$
在 $\triangle AKC$，$\angle AKC$ 為所求之角。

$$(2\sqrt{2})^2 = (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2 - 2(\sqrt{3})^2 \cos \angle AKC$$
$$\angle AKC \approx 109°$$

19. $\boxed{\text{B}}$

設 F 為 AC 上的一點使得 $BF \perp AC$。
所求之角為 $\angle BFD$。
設 $BC = 1\text{ cm}$。
留意 $\triangle ABC$ 及 $\triangle ACD$ 為等邊三角形。
$DF = BF = 1\sin 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\text{ cm}$
$BD = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}\text{ cm}$

$$BD^2 = DF^2 + BF^2 - 2(DF)(BF)\cos \angle BFD$$
$\angle BFD \approx 109°$

20. $\boxed{\text{D}}$

設 E 為 CD 上的一點使得 $BE \perp CD$。則 $AE \perp CD$ 及 $\theta = \angle AEB$。
$\angle BCD = \tan^{-1}\dfrac{15}{8}$，及 $BE = BC\sin \angle BCD = \dfrac{120}{17}\text{ m}$
$\tan\theta = \dfrac{8}{BE} = \dfrac{17}{15}$

21. $\boxed{\text{C}}$

設 K 為 AM 上的一點使得 $DK \perp AM$。
則 $\alpha = \angle EMD$ 及 $\beta = \angle EKD$。

I. ✓。由於 $\angle DKM = 90°$，可得 $DK < DM$ 及 $\alpha < \beta$。

II. ✗。由於 $\alpha < \beta$，可得 $\cos\alpha > \cos\beta$。

III. ✓。$\angle DAM = \angle BMA = \tan^{-1}\dfrac{5}{2.5} \approx 63.4°$

$DK = AD\sin\angle DAM \approx 4.47\text{ cm}$

$\tan\beta = \dfrac{DE}{DK} = \dfrac{4}{\sqrt{5}}$

22. $\boxed{\text{B}}$

參照下圖。設 E 為 BC 的中點及每邊的邊長為 12 cm。

在 $\triangle AED$，$AE = DE = 12\sin 60° = 6\sqrt{3}$ cm。

$$12^2 = AE^2 + DE^2 - 2(AE)(DE)\cos\angle AED$$

$\angle AED = \cos^{-1}\dfrac{1}{3}$

設 X 為 A 在平面 BCD 上的投影。則 X 為 $\triangle BCD$ 的形心且它在 DE 上。

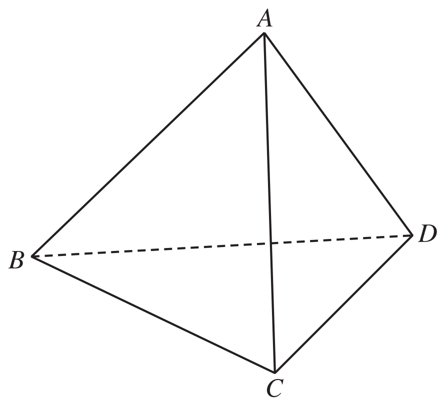
在 $\triangle AEX$，$\angle AXE = 90°$ 及

高 $= AE\sin\angle AED$

$= \sqrt{96}$ cm

體積 $= \dfrac{1}{2}(12)^2\sin 60°(\sqrt{96}) \times \dfrac{1}{3}$

$= 144\sqrt{2}\text{ cm}^3$



23. $\boxed{\text{D}}$

參照下圖。設 E 為 BC 的中點及每邊長度為 x cm。

在 $\triangle AED$ 中，$AE = DE = x\sin 60° = \dfrac{\sqrt{3}x}{2}$ cm

$$x^2 = AE^2 + DE^2 - 2(AE)(DE)\cos\angle AED$$

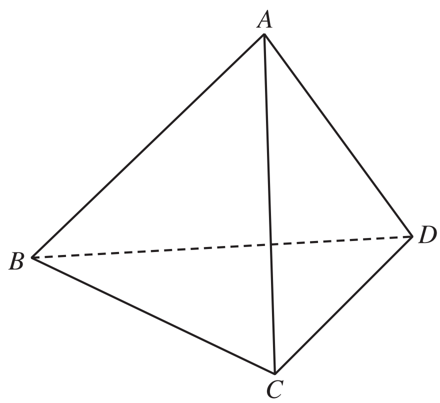
$\angle AED = \cos^{-1}\dfrac{1}{3}$

設 X 為 A 在平面 BCD 上的投影。則 X 在 DE 上及 $AX \perp BD$。

在 $\triangle AEX$，

$$AE\sin\angle AED = 4$$

$$x = 2\sqrt{6}$$



24. $\boxed{\text{C}}$

設 K 為 VB 上的一點使得 $AK \perp VB$。可得 $CK \perp VB$。

所求之角為 $\angle AKC$。

$AC = \sqrt{12^2 + 12^2} = 12\sqrt{2}\text{ cm}$

$VA = VB = VC = \sqrt{8^2 + \left(\frac{12\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{136}\text{ cm}$

在 $\triangle VAB$ 中，

$$\cos \angle ABV = \frac{\left(\frac{12}{2}\right)}{VB}$$

$$\angle ABV \approx 59.0°$$

$AK = CK = 12 \sin \angle ABV \approx 10.3\text{ cm}$

在 $\triangle AKC$ 中，

$$AC^2 = AK^2 + CK^2 - 2(AK)(CK)\cos \angle AKC$$

$$\angle AKC \approx 111°$$

結構式試題

25. (a) 在 $\triangle ABC$，

$$AC^2 = 9^2 + 15^2 - 2(9)(15)\cos 120° \quad \text{1M}$$

$$AC = 21 \text{ cm} \quad \text{1A}$$

在 $\triangle ADC$，$\angle ADC = 180° - 120° = 60°$

由於 $AD = CD$，$\angle DAC = \angle ACD = \dfrac{180° - 60°}{2} = 60°$ 及 $\triangle ACD$ 為等邊三角形。 1M

So, $AD = AC = 21$ cm。 1A

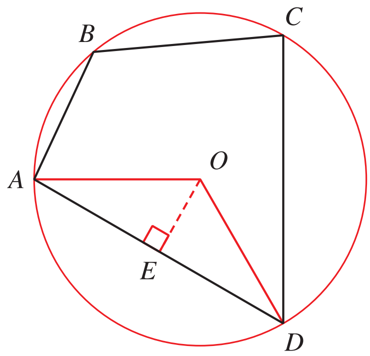
(b) 所求圓的圓心在 $\triangle ACD$ 的外心 O。設 E 為 AD 的中點。

$\angle OAE = \dfrac{60°}{2} = 30°$。

半徑 $= OA = \dfrac{AE}{\cos 30°}$ 1M

$= \dfrac{21}{2} \div \cos 30°$

$= 7\sqrt{3}$ cm 1A



(c) 所求之角為 $\angle OEV$。 1A

$OE = OA \sin 30° = \dfrac{7\sqrt{3}}{2}$ cm 1M

$\tan \angle OEV = \dfrac{15}{OA}$ 1M

$\angle OEV \approx 68.0°$ 1A

所求之角為 68.0°。

26. (a) $AC^2 = 8^2 + 12^2 - 2(8)(12)\cos 100°$ 1M

$AC \approx 15.5$ cm 1A

(b) (i) 設 M 為 BD 的中點。

$DM = 3$ cm

在 $\triangle AMD$，

$AM = \sqrt{8^2 - 3^2}$

$= \sqrt{55}$ cm 1M

在 $\triangle CMD$，

$CM = \sqrt{12^2 - 3^2}$

$= \sqrt{135}$ cm

在 $\triangle ACM$，

$(\sqrt{55})^2 = AC^2 + (\sqrt{135})^2 - 2(AC)(\sqrt{135})\cos\angle ACM$ 1M

$\angle ACM \approx 27.1°$

所求之角為 27.1°。 1A

(ii) 設 Q 為 D 至 AC 的垂足。

由於 $\sin\dfrac{\angle DPB}{2} = \dfrac{DM}{PD}$，

$\angle DPB$ 在當 PD 為極小時為極大，即 $P = Q$。 1A

當 P 由 A 移動至 Q，$\angle DPB$ 增加。

當 P 由 Q 移動至 C，$\angle DPB$ 減少。 1A

27. (a) (i) 在 $\triangle ABC$ 中，

$$28^2 = 35^2 + 21^2 - 2(35)(21)\cos\angle BCM$$

$\angle BCM \approx 53.1^\circ$ 1A

(ii) $\dfrac{CM}{\sin(180^\circ - 75^\circ - \angle BCM)} = \dfrac{21}{\sin 75^\circ}$ 1M

$CM \approx 17.1\text{ cm}$ 1A

(b) (i) 在 $\triangle ACM$ 中，$AM = 35 - CM \approx 17.9\text{ cm}$，及

$AC^2 = AM^2 + CM^2 - 2(AM)(CM)\cos\angle AMC$ 1M

$AC \approx 28.1\text{ cm}$ 1A

(ii) 在 $\triangle CMN$ 中，$CN = CM\cos\angle BCM \approx 10.3\text{ cm}$。 1M

在 $\triangle ABC$ 中，

$$28^2 = 21^2 + AC^2 - 2(AC)(21)\cos\angle ACB$$

$\angle ACB \approx 67.7^\circ$

在 $\triangle ACN$ 中，

$$AN^2 = CN^2 + AC^2 - 2(CN)(AC)\cos\angle ACB$$

$AN \approx 26.0\text{ cm}$

$$AC^2 = CN^2 + AN^2 - 2(AN)(CN)\cos\angle ANC$$

$\angle ANC \approx 89.1^\circ \neq 90^\circ$

故此，$\angle ANC$ 不是直角。 1M

$\angle AMN$ 不是平面 BCM 與水平地面的交角。

不同意該宣稱。 1A

28. (a) (i) $CM = \sqrt{10^2 + 10^2}$

$= 10\sqrt{2}\text{ cm}$ 1A

(ii) $\tan \angle ACB = \dfrac{20}{10}$

$\angle ACB \approx 63.4°$ 1A

(iii) $\triangle ACM$ 的面積 $= \dfrac{1}{2}(20 - 10)(10)$

$= 50\text{ cm}^2$ 1A

(b) (i) 在 $\triangle CDM$，$\angle DCM = \angle ACB - 45° \approx 18.4°$ 1A

$DM^2 = CD^2 + (10\sqrt{2})^2 - 2(CD)(10\sqrt{2})\cos \angle DCM$ 1M

$CD \approx 7.45\text{ cm}$ 1A

在 $\triangle BCD$，$BD = \sqrt{10^2 - CD^2} \approx 6.67\text{ cm}$ 1A

(ii) 設 N 為 B 至 CM 的垂足。

所求之角為 $\angle BND$。

在 $\triangle BNC$，$BN = 10\sin 45° = 5\sqrt{2}\text{ cm}$

在 $\triangle BND$，

$\sin \angle BND = \dfrac{BD}{5\sqrt{2}}$ 1M

$\angle BND \approx 70.5°$ 1A

所求之角為 70.5°。