

M2REG-VEC-2324-ASM-SET 2-MATH

建議題解

1. (a) $\mathbf{p} = 6\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ 1A
 $\mathbf{q} = 3\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$ 1A
 (b) $\mathbf{p} - 2\mathbf{q} = (6 - 6)\mathbf{i} + (3 - 12)\mathbf{j}$ 1M
 $= -9\mathbf{j}$
 $\overrightarrow{AB} = 6\mathbf{j} = -\frac{2}{3}(\mathbf{p} - 2\mathbf{q}) = -\frac{2}{3}\mathbf{p} + \frac{4}{3}\mathbf{q}$ 1A
 $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PO}$
 $= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \mathbf{p}$ 1M
 $= -\frac{4}{3}\mathbf{p} + \frac{2}{3}\mathbf{q}$ 1A

2. (a) $\overrightarrow{OA} = 4 \cos 120^\circ \mathbf{i} + 4 \sin 120^\circ \mathbf{j} = -2\mathbf{i} + 2\sqrt{3}\mathbf{j}$ 1A
 (b) $\overrightarrow{OB} = (-2\mathbf{i} + 2\sqrt{3}\mathbf{j}) + (-4\mathbf{i}) = -6\mathbf{i} + 2\sqrt{3}\mathbf{j}$ 1A
 $\overrightarrow{AC} = (-4\mathbf{i}) - (-2\mathbf{i} + 2\sqrt{3}\mathbf{j}) = -2\mathbf{i} - 2\sqrt{3}\mathbf{j}$ 1A

3. (a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$
 $= 6\mathbf{i} - 8\mathbf{j}$ 1A
 (b) (i) $\overrightarrow{AC} = \left(\frac{3}{AB}\right)\overrightarrow{AB}$
 $= \frac{3}{\sqrt{6^2 + 8^2}}(6\mathbf{i} - 8\mathbf{j})$ 1M
 $= \frac{9}{5}\mathbf{i} - \frac{12}{5}\mathbf{j}$ 1A
 (ii) $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}$
 $= -\frac{11}{5}\mathbf{i} + \frac{3}{5}\mathbf{j}$ 1A

4. (a) $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{AB}$
 $(-3-m)\mathbf{i} + (4-n)\mathbf{j} = 2[(2-m)\mathbf{i} + (-1-n)\mathbf{j}]$
 $-(m+3)\mathbf{i} + (4-n)\mathbf{j} = 2(2-m)\mathbf{i} - 2(n+1)\mathbf{j}$
 可得 $-(m+3) = 2(2-m)$ 及 $4-n = -2(n+1)$ 。
 求解後，可得 $m = 7$ 及 $n = -6$ 。
 1M
 1A+1A
- (b) $\overrightarrow{AB} = -5\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$
 所求向量 $= \frac{1}{AB}\overrightarrow{AB}$
 $= \frac{1}{\sqrt{5^2 + 5^2}}(-5\mathbf{i} + 5\mathbf{j})$
 $= -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$
 1M
 1A
- (c) 所求向量 $= -\frac{\sqrt{8}}{AB}\overrightarrow{AB}$
 $= -\sqrt{8}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}\right)$
 $= 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$
 1M
 1A
5. (a) $2\mathbf{u} + \mathbf{v} = (12-1)\mathbf{i} + (4-4)\mathbf{j}$
 $\mathbf{i} = \frac{2}{11}\mathbf{u} + \frac{1}{11}\mathbf{v}$
 $\mathbf{v} = -\left(\frac{2}{11}\mathbf{u} + \frac{1}{11}\mathbf{v}\right) - 4\mathbf{j}$
 $\mathbf{j} = -\frac{1}{22}\mathbf{u} - \frac{3}{11}\mathbf{v}$
 1M
 1A
 1A
- (b) $4\mathbf{i} - 5\mathbf{j} = a\mathbf{u} + b\mathbf{v}$
 $\left(4 \times \frac{2}{11} - 5 \times \left(-\frac{1}{22}\right)\right)\mathbf{u} + \left(4 \times \frac{1}{11} - 5 \times \left(-\frac{3}{11}\right)\right)\mathbf{v} = a\mathbf{u} + b\mathbf{v}$
 $\frac{21}{22}\mathbf{u} + \frac{19}{11}\mathbf{v} = a\mathbf{u} + b\mathbf{v}$
 故此， $a = \frac{21}{22}$ 及 $b = \frac{19}{11}$ 。
 1M
 1A
6. (a) $\overrightarrow{AB} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$
 1A
 (b) $\overrightarrow{BC} = r\mathbf{i} + (s-2)\mathbf{j} + (-r-6)\mathbf{k}$
 1A
 (c) 若 A 、 B 和 C 共線，則 $\frac{r}{-1} = \frac{-r-6}{3} = \frac{s-2}{1}$ 。
 1M
 求解後，可得 $r = 3$ 及 $s = -1$ 。
 1A
 C 的坐標為 $(3, -1, -4)$ 。
 1A
7. $\overrightarrow{AB} = -2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 4\mathbf{k}$
 $\overrightarrow{CD} = 6\mathbf{i} - \lambda\mathbf{j} + (2\mu+2)\mathbf{k}$
 若 $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$ ，則 $\frac{-2}{6} = \frac{1}{-\lambda} = \frac{-4}{2\mu+2}$ 。
 1A
 1M
 求解後，可得 $\lambda = 3$ 及 $\mu = 5$ 。
 1A

8. $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA} = 22\mathbf{i} - \mathbf{j}$ 1A
 $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} = 25\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ 1M
 D 的坐標為 $(25, -2, 1)$ 。 1A

9. $\overrightarrow{AB} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ 及 $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{14}$ 1M
 $\overrightarrow{DC} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k} = \overrightarrow{AB}$ 及 $|\overrightarrow{DC}| = \sqrt{14}$
 $\overrightarrow{AD} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$ 及 $|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{14}$
 $\overrightarrow{BC} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k} = \overrightarrow{AD}$ 及 $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{14}$ 1A
 由於四邊長度相等， $ABCD$ 為菱形。 1

10. (a) $\overrightarrow{PQ} = -5\mathbf{i} + \mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ 1A
 $\overrightarrow{PR} = -\frac{15}{4}\mathbf{i} + \frac{3}{4}\mathbf{j} + \frac{9}{2}\mathbf{k}$ 1A
 (b) $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PR}$
 $= (2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 5\mathbf{k}) + \left(-\frac{15}{4}\mathbf{i} + \frac{3}{4}\mathbf{j} + \frac{9}{2}\mathbf{k}\right)$ 1M
 $= -\frac{7}{4}\mathbf{i} + \frac{15}{4}\mathbf{j} - \frac{1}{2}\mathbf{k}$ 1A
 (c) 當 $\overrightarrow{PS} = 3\overrightarrow{PQ}$ ，
 $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PS}$
 $= (2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 5\mathbf{k}) + (-15\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 18\mathbf{k})$
 $= -13\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 13\mathbf{k}$ 1M
 當 $\overrightarrow{PS} = -3\overrightarrow{PQ}$ ，
 $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PS}$
 $= (2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 5\mathbf{k}) + (15\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 18\mathbf{k})$
 $= 17\mathbf{i} - 23\mathbf{k}$
 所求坐標為 $(-13, 6, 13)$ 或 $(17, 0, -23)$ 。 1A

11. 設 $OQ : QB = t : 1 - t$ 。
 $\overrightarrow{CQ} = t\overrightarrow{CB} + (1 - t)\overrightarrow{CO}$ 1M
 $\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{CO} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CO} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$ 1A
 由於 C 、 Q 和 P 共線，
 $\frac{t}{\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1 - t}{1}$ 1M
 $t = \frac{1}{3}$
 故此， $OQ : QB = \frac{1}{3} : \frac{2}{3} = 1 : 2$ 。 1A

12. (a) $\overrightarrow{AR} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AQ}$ 1M
 $= \frac{3}{4}\mathbf{u} + \frac{1}{4}\mathbf{v}$ 1A
- (b) $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}(3\overrightarrow{AQ}) + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{3}{2}\mathbf{u} + \frac{1}{2}\mathbf{v}$ 1A
- (c) $\overrightarrow{AP} = \frac{3}{2}\mathbf{u} + \frac{1}{2}\mathbf{v} = 2\overrightarrow{AR}$ 1M
 因此， A 、 R 和 P 共線。 1

13. (a) $\overrightarrow{AE} = k\overrightarrow{AC} = 3k\overrightarrow{AB} + 2k\overrightarrow{AD} = 3k\mathbf{u} + 2k\mathbf{v}$ 1A
- (b) $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{r+1}\overrightarrow{AB} + \frac{r}{r+1}\overrightarrow{AD}$ 1M
 $= \frac{1}{r+1}\mathbf{u} + \frac{r}{r+1}\mathbf{v}$ 1A
- (c) 利用 (a) 及 (b)， $3k = \frac{1}{r+1}$ 及 $2k = \frac{r}{r+1}$ 。 1M
- $\frac{2k}{3k} = \frac{r}{r+1} \div \frac{1}{r+1}$ 1M
 $r = \frac{2}{3}$ 1A
- 當 $r = \frac{2}{3}$ ， $k = \frac{1}{3} \times \frac{1}{r+1} = \frac{1}{5}$ 。 1A
- (d) $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB} = \frac{3}{5}\mathbf{u} + \frac{2}{5}\mathbf{v} - \mathbf{u} = -\frac{2}{5}\mathbf{u} + \frac{2}{5}\mathbf{v}$ 1A