M2REG-TRIG-2324-ASM-SET 3-MATH
建議題解

1. (a) $\tan B = \tan\left(\frac{\pi}{4} - A\right)$

$$= \frac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan A}{1 + \tan\frac{\pi}{4}\tan A}$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{1+2m}}{1 + 1\cdot\frac{1}{1+2m}}$$ 1M

$$= \frac{(1+2m)-1}{(1+2m)+1}$$

$$= \frac{m}{1+m}$$ 1

(b) $\tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A\tan B}$

$$= \frac{\frac{1}{1+2m} - \frac{m}{1+m}}{1 + \left(\frac{1}{1+2m}\right)\left(\frac{m}{1+m}\right)}$$ 1M

$$= \frac{(1+m) - m(1+2m)}{(1+2m)(1+m)} \div \frac{(1+2m)(1+m)+m}{(1+2m)(1+m)}$$

$$= \frac{1-2m^2}{1+4m+2m^2}$$ 1A

2. (a) $\cot(\angle A + \angle B) = \frac{1}{\tan(\angle A + \angle B)}$

$$= \frac{1 - \tan\angle A\tan\angle B}{\tan\angle A + \tan\angle B}$$ 1M

$$= \frac{1 - (\sqrt{a} + \sqrt{a-1})(\sqrt{a} - \sqrt{a-1})}{(\sqrt{a} + \sqrt{a-1}) + (\sqrt{a} - \sqrt{a-1})}$$

$$= \frac{1 - [a - (a-1)]}{2\sqrt{a}}$$

$$= 0$$ 1A

(b) $\cot(\angle A + \angle B) = 0$

$\angle A + \angle B = 90^\circ$ 1A

$\angle C = 180^\circ - (\angle A + \angle B)$

$= 90^\circ$

因此，$\triangle ABC$ 為直角三角形。 1A

3. (a) $$k\cos(\alpha-\beta)=\cos(\alpha+\beta)$$

$$k(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$ 1M

$$(k+1)\sin\alpha\sin\beta=(1-k)\cos\alpha\cos\beta$$

$$(k+1)\tan\alpha\tan\beta=1-k$$

$$\tan\alpha\tan\beta=\frac{1-k}{1+k}$$ 1

(b) $$\frac{1-k}{1+k}=\tan(2\beta)\tan\beta$$

$$=\frac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta}\cdot\tan\beta$$

$$=\frac{2\tan^2\beta}{1-\tan^2\beta}$$ 1A

$$(1-k)(1-\tan^2\beta)=2(1+k)\tan^2\beta$$

$$(3+k)\tan^2\beta=1-k$$

$$\tan^2\beta=\frac{1-k}{3+k}$$

$$\tan\beta=\pm\sqrt{\frac{1-k}{3+k}}$$ 1A

留意當 $\pi<\alpha<2\pi$，可得 $\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$ 及 $\tan\beta<0$。 1A

因此，$\tan\beta=-\sqrt{\frac{1-k}{3+k}}$。 1A

4. 由於 O 為 $\triangle ABC$ 的垂心，可得 $CD\perp AB$ 及 $BE\perp AC$。

$$\tan\alpha=\frac{CE}{BE}$$

$$=\frac{4\sqrt{6}}{6\sqrt{6}}$$

$$=\frac{2}{3}$$ 1A

$$\tan\beta=\frac{BD}{CD}$$

$$=\frac{3}{15}$$

$$=\frac{1}{5}$$ 1A

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

$$=\frac{\frac{2}{3}+\frac{1}{5}}{1-\frac{2}{3}\times\frac{1}{5}}$$

$$=1$$ 1A

由於 $0<\alpha+\beta<\pi$，可得 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$。 1

5. $\tan(x+y) - \tan x - \tan y - \tan x \tan y \tan(x+y)$

$= \tan(x+y)(1 - \tan x \tan y) - (\tan x + \tan y)$

$= \dfrac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}(1 - \tan x \tan y) - (\tan x + \tan y)$ 1M+1M

$= (\tan x + \tan y) - (\tan x + \tan y)$

$= 0$

因此，$\tan(x+y) - \tan x - \tan y = \tan x \tan y \tan(x+y)$。 1

6. $\cos(x+y+z) = \cos(x+y)\cos z - \sin(x+y)\sin z$ 1M

$= (\cos x \cos y - \sin x \sin y)\cos z - (\sin x \cos y + \cos x \sin y)\sin z$ 1M

$= \cos x \cos y \cos z - \sin x \sin y \cos z - \sin x \cos y \sin z - \cos x \sin y \sin z$

$= \cos x \cos y \cos z(1 - \tan x \tan y - \tan x \tan z - \tan y \tan z)$ 1

7. $\dfrac{\cos(6\alpha+\beta)}{\sin 3\alpha} + 2\sin(3\alpha+\beta)$

$= \dfrac{\cos[(3\alpha+\beta)+3\alpha] + 2\sin(3\alpha+\beta)\sin 3\alpha}{\sin 3\alpha}$

$= \dfrac{\cos(3\alpha+\beta)\cos 3\alpha - \sin(3\alpha+\beta)\sin 3\alpha + 2\sin(3\alpha+\beta)\sin 3\alpha}{\sin 3\alpha}$ 1M

$= \dfrac{\cos(3\alpha+\beta)\cos 3\alpha + \sin(3\alpha+\beta)\sin 3\alpha}{\sin 3\alpha}$

$= \dfrac{\cos[(3\alpha+\beta)-3\alpha]}{\sin 3\alpha}$ 1M

$= \dfrac{\cos\beta}{\sin 3\alpha}$ 1

8. $\dfrac{\cos A - \cos B \cos(A-B)}{\sin A - \cos B \sin(A-B)}$

$= \dfrac{\cos A - \cos B(\cos A \cos B + \sin A \sin B)}{\sin A - \cos B(\sin A \cos B - \cos A \sin B)}$ 1M

$= \dfrac{\cos A - \cos A \cos^2 B - \sin A \sin B \cos B}{\sin A - \sin A \cos^2 B + \cos A \sin B \cos B}$

$= \dfrac{\cos A(1-\cos^2 B) - \sin A \sin B \cos B}{\sin A(1-\cos^2 B) + \cos A \sin B \cos B}$

$= \dfrac{\cos A \sin^2 B - \sin A \sin B \cos B}{\sin A \sin^2 B + \cos A \sin B \cos B}$

$= \dfrac{\sin B(\cos A \sin B - \sin A \cos B)}{\sin B(\sin A \sin B + \cos A \cos B)}$

$= \dfrac{\sin(B-A)}{\cos(B-A)}$ 1M

$= \tan(B-A)$ 1

9. (a) $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)} = \dfrac{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta}$ 1M

$$= \dfrac{\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\cos\beta} - \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\cos\beta} + \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta}}$$

$= \dfrac{\cot\alpha - \tan\beta}{\cot\alpha + \tan\beta}$ 1

(b) 可得 $\cos(\alpha+\beta)(\cot\alpha+\tan\beta) = \cos(\alpha-\beta)(\cot\alpha-\tan\beta)$。

$$\frac{1}{\cos 1^\circ}\sum_{i=1}^{90}\cos(2i-1)^\circ[\cot i^\circ + \tan(i-1)^\circ]$$

$$= \frac{1}{\cos 1^\circ}\sum_{i=1}^{90}\cos[i+(i-1)]^\circ[\cot i^\circ + \tan(i-1)^\circ]$$

$= \dfrac{1}{\cos 1^\circ}\displaystyle\sum_{i=1}^{90}\cos[i-(i-1)]^\circ[\cot i^\circ - \tan(i-1)^\circ]$ 1M

$$= (\cot 1^\circ + \cot 2^\circ + \cot 3^\circ + \dots + \cot 90^\circ) - (\tan 0^\circ + \tan 1^\circ + \tan 2^\circ + \dots + \tan 89^\circ)$$

$= (\tan 89^\circ + \tan 88^\circ + \tan 87^\circ + \dots + \tan 0^\circ) - (\tan 0^\circ + \tan 1^\circ + \tan 2^\circ + \dots + \tan 89^\circ)$ 1M

$= 0$ 1A

10. $\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2} + \tan\dfrac{B}{2}\tan\dfrac{C}{2} + \tan\dfrac{C}{2}\tan\dfrac{A}{2}$

$= \tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2} + \tan\dfrac{B}{2}\tan\dfrac{180^\circ - A - B}{2} + \tan\dfrac{180^\circ - A - B}{2}\tan\dfrac{A}{2}$ 1M

$$= \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}\cot\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right) + \cot\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)\tan\frac{A}{2}$$

$= \tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2} + \left(\tan\dfrac{B}{2}+\tan\dfrac{A}{2}\right)\cdot\dfrac{1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}}{\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}}$ 1M

$$= \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} + 1 - \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}$$

$= 1$ 1

11. $\dfrac{\tan 10x - \tan 8x}{1 + \tan 10x\tan 8x} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\tan(10x - 8x) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 1M

$$\tan 2x = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$2x = \dfrac{\pi}{6}$ 或 $\dfrac{7\pi}{6}$ 或 $\dfrac{13\pi}{6}$ 或 $\dfrac{19\pi}{6}$ 1M

$x = \dfrac{\pi}{12}$ 或 $\dfrac{7\pi}{12}$ 或 $\dfrac{13\pi}{12}$ 或 $\dfrac{19\pi}{12}$ 1A

12. (a) $\tan(\alpha+\beta)(\tan\alpha+\tan\beta)+2$

$= \dfrac{(\tan\alpha+\tan\beta)^2}{1-\tan\alpha\tan\beta}+2$ 1M

$= \dfrac{\tan^2\alpha+2\tan\alpha\tan\beta+\tan^2\beta+2(1-\tan\alpha\tan\beta)}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

$= \dfrac{\tan^2\alpha+\tan^2\beta+2}{1-\tan\alpha\tan\beta}$ 1M

$= \dfrac{(\tan^2\alpha+1)+(\tan^2\beta+1)}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

$= \dfrac{\sec^2\alpha+\sec^2\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$ 1

(b) $\tan\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)\left(\tan\alpha+\tan\dfrac{\pi}{4}\right)=-8$

$\tan\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)\left(\tan\alpha+\tan\dfrac{\pi}{4}\right)+2=-6$

$\dfrac{\sec^2\alpha+\sec^2\frac{\pi}{4}}{1-\tan\alpha\tan\frac{\pi}{4}}=-6$ 1M

$\dfrac{1+\tan^2\alpha+2}{1-\tan\alpha}=-6$

$\tan^2\alpha+3=-6+6\tan\alpha$

$\tan^2\alpha-6\tan\alpha+9=0$ 1A

$\tan\alpha=3$

$\alpha\approx 1.25$ 或 4.39 1A

13. (a) $\tan A$ 及 $\tan B$ 為方程 $x^2+6x-3=0$ 的根。

可得 $\tan A+\tan B=-6$ 及 $\tan A\tan B=-3$。 1A

$(\tan A-\tan B)^2=\tan^2 A-2\tan A\tan B+\tan^2 B$

$=(\tan A+\tan B)^2-4\tan A\tan B$ 1M

$=(-6)^2-4(-3)$

$=48$ 1A

由於 A 為鈍角及 B 為銳角，$\tan A<0$ 及 $\tan B>0$。

$\tan A-\tan B=-\sqrt{48}=-4\sqrt{3}$ 1A

(b) $\tan(A-B)=\dfrac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}$ 1M

$=\dfrac{-4\sqrt{3}}{1+(-3)}$

$=2\sqrt{3}$ 1A

(c) 由於 $\tan(A-B)>0$，角 $A-B$ 為銳角。

$\sec(A-B)=\dfrac{\sqrt{(2\sqrt{3})^2+1}}{1}$

$=\sqrt{13}$ 1A

$\csc(A-B)=\dfrac{\sqrt{13}}{2\sqrt{3}}$

$=\dfrac{\sqrt{39}}{6}$ 1A