

REG-GS-2324-ASM-SET 2-MATH

建議題解

多項選擇題

1. A	2. A	3. C	4. A	5. A
6. D	7. A	8. B	9. D	10. A
11. A	12. C	13. C	14. B	15. A
16. A	17. C	18. B	19. B	20. C
21. B	22. A	23. B	24. A	25. D
26. A	27. D	28. A	29. A	30. D

1. A

$$\begin{aligned}\text{所求之和} &= \frac{\frac{3}{4}(4^n - 1)}{4 - 1} \\ &= \frac{1}{4}(4^n - 1)\end{aligned}$$

2. A

$$\begin{aligned}\text{所求之和} &= \frac{2 \left[1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{10} \right]}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} \\ &= \frac{2 \left(1 - \frac{1}{32} \right)}{\left(\frac{2 - \sqrt{2}}{2} \right)} \\ &= \frac{31}{8(2 - \sqrt{2})}\end{aligned}$$

3. C

$$\begin{aligned}\text{所求之和} &= \frac{-1[1 - (-4)^7]}{1 - (-4)} \\ &= -3277\end{aligned}$$

4. A

$$\begin{aligned}\text{第 5 項} &= (32 - 2^{5-5}) - (32 - 2^{5-4}) \\ &= 31 - 30 \\ &= 1\end{aligned}$$

5. A

$$640 \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = -5$$

$$\begin{aligned}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} &= -\frac{1}{128} \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)^7\end{aligned}$$

$$n = 8$$

共有 8 項。

$$\begin{aligned}\text{所求之和} &= \frac{640 \left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^8\right]}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} \\ &= 425\end{aligned}$$

6. D

$$\begin{aligned}\text{所求之和} &= \frac{7(5^7 - 1)}{5 - 1} \\ &= 136717\end{aligned}$$

7. A

$$\frac{-1(3^k - 1)}{3 - 1} < -200$$

$$3^k > 401$$

$$k \log 3 > \log 401$$

$$k > 5.46$$

k 的極小值為 6。

8. B

$$\frac{3(3^k - 1)}{3 - 1} > 780$$

$$3^k > 521$$

$$k \log 3 > \log 521$$

$$k > 5.69$$

k 的極小值為 6。

9. D

$$\begin{aligned}\text{所求之和} &= \frac{18}{1 - \frac{1}{3}} \\ &= 27\end{aligned}$$

10. A

設公比為 r 。

$$\frac{30}{1-r} = 25$$
$$r = \frac{1}{6}$$

11. A

設首項為 a 。

$$\frac{a}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{6}$$
$$a = \frac{1}{4}$$

$$\text{所求之和} = \frac{\frac{1}{4} \left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^5 \right]}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)}$$
$$= \frac{11}{64}$$

12. C

$$\text{首四項之和} = -10 - 5 - 2.5 - 1.25$$

$$= -18.75$$

$$\text{無限項之和} = \frac{-10}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$= -20$$

$$\text{誤差} = -18.75 - (-20)$$

$$= \frac{5}{4}$$

13. C

設首項為 a 。

$$\frac{a}{1 - \frac{1}{2}} = 16$$
$$a = 8$$

14. B

$$\frac{2x-1}{5x+2} = \frac{x-2}{2x-1}$$

$$(2x-1)^2 = (x-2)(5x+2)$$

$$4x^2 - 4x + 1 = 5x^2 - 8x - 4$$

$$0 = x^2 - 4x - 5$$

$$x = 5 \quad \text{或} \quad -1 \quad (\text{捨去})$$

$$\text{所求之和} = \frac{27}{1 - \frac{9}{27}}$$

$$= \frac{81}{2}$$

15. A

$$\text{公比} = \frac{q}{p}$$

$$\text{首項} = \frac{p}{\left(\frac{q}{p}\right)^2} = \frac{p^3}{q^2}$$

$$\text{所求之和} = \frac{\frac{p^3}{q^2}}{1 - \frac{q}{p}}$$

$$= \frac{p^3}{q^2} \div \frac{p-q}{p}$$

$$= \frac{p^4}{q^2(p-q)}$$

16. A

$$\frac{36}{2k} = \frac{72k}{36}$$

$$36 = 4k^2$$

$$k = 3 \quad \text{或} \quad -3 \quad (\text{捨去})$$

該等比數列為 216, 36, 6, ...

$$\text{所求之和} = \frac{216}{1 - \frac{6}{36}}$$

$$= \frac{1296}{5}$$

17. C

$$\frac{a}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{45}{8}$$

$$a = \frac{15}{2}$$

18. B

$$\text{公比} = \frac{-24}{72} = -\frac{1}{3}$$

$$\text{無限項之和} = \frac{72}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} = 54$$

19. B

設首項及公比分別為 a 及 r 。

$$\begin{cases} \frac{a(1-r^3)}{1-r} = -\frac{3}{8} \\ \frac{a}{1-r} = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\left(-\frac{1}{3}\right)(1-r^3) = -\frac{3}{8}$$

$$r^3 = -\frac{1}{8}$$

$$r = -\frac{1}{2}$$

20. C

所有正數項： $36, 9, \frac{9}{4}, \dots$

$$\text{總和} = \frac{36}{1 - \frac{1}{4}} = 48$$

21. B

$$\begin{aligned} \text{所求之和} &= \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^5} + \dots\right) + \left(\frac{2}{3^3} + \frac{2}{3^7} + \dots\right) = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3^4}} + \frac{\frac{2}{27}}{1 - \frac{1}{3^4}} \\ &= \frac{33}{80} \end{aligned}$$

22. A

設首項及公比分別為 a 及 r 。

$$\frac{ar^7}{ar^5} = \frac{3}{48}$$

$$r^2 = \frac{1}{16}$$

$$r = \pm \frac{1}{4}$$

I. $\checkmark$ 。 $x_4 = \frac{48}{r^2} = 768$ 。

II. $\times$ 。當 $r = -\frac{1}{4}$ 時， $\frac{x_9}{x_{12}} = \frac{1}{r^3} < 0 < 1$ 。

III. $\times$ 。共有 n 項。

$$x_4 + x_6 + \dots + x_{2n+2} = \frac{768 \left[1 - \left(\frac{1}{16}\right)^n\right]}{1 - \frac{1}{16}} = 819.2 \left[1 - \left(\frac{1}{16}\right)^n\right] < 819.2 < 1000$$

23. B

$$\begin{aligned}\text{I. } \checkmark. \text{ 通項} &= (1 - 2^{-n}) - (1 - 2^{-(n-1)}) \\ &= 2^{-n}(-1 + 2) \\ &= 2^{-n}\end{aligned}$$

可得 $2^{-n} < 1$ 對所有正整數 n 。

II. $\times$ 。對所有正整數 n ，第 n 項 $= \frac{1}{2^n}$ 為有理數。

$$\begin{aligned}\text{III. } \checkmark. \log T_{n+1} - \log T_n &= \log 2^{-n-1} - \log 2^{-n} \\ &= (-n-1) \log 2 + n \log 2 \\ &= -\log 2 = \text{常數}\end{aligned}$$

因此，它是一等差數列。

24. A

$$\begin{aligned}\text{通項} &= (2^{n+1} - 2) - (2^n - 2) \\ &= 2^n(2 - 1) \\ &= 2^n\end{aligned}$$

$$\text{I. } \checkmark. \frac{T(n+1)}{T(n)} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2 = \text{常數}。$$

$$\text{II. } \times. \text{ 第二項} = 2^2 = 4 \neq 6。$$

III. $\times$ 。

25. D

設首項及公比分別為 a 及 r 。

$$\begin{aligned}\frac{ar^7}{ar^2} &= \frac{6}{192} \\ r^5 &= \frac{1}{32} \\ r &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

I. $\times$ 。

$$\text{II. } \checkmark. a = \frac{192}{r^2} = 768。$$

$$\begin{aligned}768 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} &> 10^{-2} \\ (n-1) \log \frac{1}{2} &> \log \frac{1}{76800} \\ n &< 17.2\end{aligned}$$

有 17 項大於 10^{-2} 。

$$\begin{aligned}\text{III. } \checkmark. \text{ 所求之和} &= \frac{768 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{13}\right)}{1 - \frac{1}{2}} \approx 1535.8 \\ &> 1535\end{aligned}$$

26. A

- I. ✓。第 4 項 $= 2 \times 3^4 = 162$ 。
- II. ✗。首 n 項之和 $= \frac{2(3)(3^n - 1)}{3 - 1} = 3(3^n - 1)$ 。
- III. ✗。因公比大於 1，無限項之和不存在。

27. D

設首項及公比分別為 a 及 r 。

$$\frac{ar^7}{ar^3} = \frac{4}{243} \div \frac{1}{12}$$

$$r^4 = \frac{16}{81}$$

$$r = \pm \frac{2}{3}$$

當 $r = \frac{2}{3}$ 時， $a = \frac{1}{12} \div r^3 = \frac{9}{32}$ 及 $S(\infty) = \frac{a}{1 - r} = \frac{27}{32}$ (捨去)

當 $r = -\frac{2}{3}$ 時， $a = \frac{1}{12} \div r^3 = \frac{-9}{32}$ 。

I. ✗。

II. ✓。 $a_1 + a_2 + \dots + a_{10} = \frac{a(r^9 - 1)}{r - 1} \approx -0.173 < -\frac{1}{10}$ 。

III. ✓。 $a_2 + a_4 + \dots = \frac{ar}{1 - r^2} = \frac{27}{80}$ 。

28. A

設首項及公比分別為 a 及 r 。

$$\frac{ar^6}{ar^4} = \frac{15}{375}$$

$$r^2 = \frac{1}{25}$$

$$r = \pm \frac{1}{5}$$

I. ✓。 $a_1 = \frac{375}{r^4} = 234\,375$ 。

II. ✗。當 $r = -\frac{1}{5}$ 時， $a_2 = \frac{ar^4}{r^3} < 0$ 。故此， $a_2 \neq 46\,875$ 。

III. ✗。當 $r = -\frac{1}{5}$ 時，

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + \dots &= \frac{234\,375}{1 - \left(-\frac{1}{5}\right)} \\ &= 195\,312.5 < 290\,000 \end{aligned}$$

29. A

設首項及公比分別為 a 及 r 。

$$\frac{ar^6}{ar^2} = \frac{48}{3}$$

$$r^4 = 16$$

$$r = \pm 2$$

I. $\checkmark$ 。第 5 項 $= 3 \times r^2 = 12$ 。

II. $\times$ 。當 $r = -2$ 時，該數列有負值項。

III. $\times$ 。無限項之和不存在。

30. D

設公比為 r 。

$$r^{6-2} = \frac{1}{18} \div \frac{9}{32}$$

$$r^4 = \frac{16}{81}$$

$$r = \pm \frac{2}{3}$$

當 $r = \frac{2}{3}$ 時， $a_1 = \frac{a_2}{r} = \frac{27}{64}$ 。

無限項之和 $= \frac{a_1}{1-r} = \frac{81}{64} > \frac{1}{2}$ 。

當 $r = -\frac{2}{3}$ 時， $a_1 = \frac{a_2}{r} = -\frac{27}{64}$ 。

無限項之和 $= \frac{a_1}{1-r} = -\frac{81}{320} < \frac{1}{2}$ 。

因此， $r = -\frac{2}{3}$ 。

I. $\checkmark$ 。 $a_4 = a_2 \times r^2 = \frac{1}{8}$

II. $\checkmark$ 。

$$\begin{aligned} a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + a_9 - a_{10} &= \frac{a_1[1 - (-r)^{10}]}{1 - (-r)} \\ &= \frac{\frac{a_2}{r}(1 - r^{10})}{1 + r} \\ &\approx -1.24 < -1 \end{aligned}$$

III. $\checkmark$ 。

$$\begin{aligned} a_2 + a_4 + \dots + &= \frac{a_2}{1 - r^2} \\ &= \frac{81}{160} \\ &= \frac{9}{320 \left(\frac{1}{18} \right)} \end{aligned}$$

結構式試題

$$\begin{aligned}
 31. \quad (a) \quad A(1) + A(2) + A(3) + \dots + A(n) &= 1000(2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n) \\
 &= 1000 \times \frac{2(2^n - 1)}{2 - 1} && 1M \\
 &= 2000(2^n - 1) && 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (b) \quad B(1) + B(2) + B(3) + \dots + B(n) &> A(1) + A(2) + A(3) + \dots + A(n) \\
 \frac{4(4^n - 1)}{4 - 1} &> 2000(2^n - 1) \\
 \frac{4}{3}(2^n)^2 - 2000(2^n) + \frac{5996}{3} &> 0 && 1A \\
 2^n < 1 \quad (\text{捨去}) \quad \text{或} \quad 2^n > 1499 \\
 n \log 2 &> \log 1499 && 1M \\
 n &> 10.5
 \end{aligned}$$

n 的最小值為 11。 1A

$$32. \quad (a) \quad S(n) = \frac{16 \left[1 - \left(\frac{3}{4} \right)^n \right]}{1 - \frac{3}{4}} \quad 1M$$

$$= 64 \left[1 - \left(\frac{3}{4} \right)^n \right] \quad 1A$$

$$\begin{aligned}
 (b) \quad \text{所求之和} &= 64 \left[1 - \left(\frac{3}{4} \right)^7 \right] \\
 &= \frac{14197}{256} && 1A
 \end{aligned}$$

$$(c) \quad 64 \left[1 - \left(\frac{3}{4} \right)^k \right] > 60 \quad 1M$$

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{3}{4} \right)^k &< \frac{1}{16} \\
 k \log \frac{3}{4} &< \log \frac{1}{16} && 1M
 \end{aligned}$$

$$k > 9.64$$

k 的最小值為 10。 1A

33. (a) 設首項及公比為 a 及 r 。

$$\begin{cases} ar^4 + ar^5 + ar^6 = 6318 \\ a + ar + ar^2 = 78 \end{cases} \quad 1M$$

$$\frac{ar^4(1+r+r^2)}{a(1+r+r^2)} = \frac{6318}{78} \quad 1M$$

$$r^4 = 81$$

$$r = \pm 3 \quad 1A$$

當 $r = 3$ 時, $a = \frac{78}{1+r+r^2} = 6$ 及 $T(n) = 6(3)^{n-1}$ 。

當 $r = -3$ 時, $a = \frac{78}{1+r+r^2} = \frac{78}{7}$ 及 $T(n) = \frac{78}{7}(-3)^{n-1}$ 。 1A

- (b) (i) $T(n) = 6(3)^{n-1}$

$$\frac{6(3^m - 1)}{3 - 1} > 5000 \quad 1M$$

$$3^m > \frac{5003}{3}$$

$$m \log 3 > \log \frac{5003}{3} \quad 1M$$

$$m > 6.75$$

m 的最小值為 7。 1A

(ii) 所求之和 = $\frac{6[(3^3)^8 - 1]}{3^3 - 1}$ 1M+1A

$$\approx 6.52 \times 10^{10} \quad 1A$$

34. (a) 設公比為 r 。

$$\begin{cases} G_1 r + G_1 r^2 = 1944 \\ G_1 r^4 + G_1 r^5 = 72 \end{cases}$$

$$\frac{G_1 r^4(1+r)}{G_1 r(1+r)} = \frac{72}{1944} \quad 1M$$

$$r^3 = \frac{1}{27}$$

$$r = \frac{1}{3} \quad 1A$$

因此, $G_1 = \frac{1944}{r+r^2} = 4374$ 。 1A

(b) $\frac{4374}{1-\frac{1}{3}} - \frac{4374 \left[1 - \left(\frac{1}{3} \right)^n \right]}{1-\frac{1}{3}} < 5 \times 10^{-19}$ 1M+1M

$$6561 \left(\frac{1}{3} \right)^n < 5 \times 10^{-19}$$

$$\log 6561 + n \log \frac{1}{3} < \log 5 \times 10^{-19} \quad 1M$$

$$n > 46.4$$

n 的最小值為 47。 1A

35. 設首項及公比分別為 a 及 r ，及 243 為第 n 項。

考慮由項 243 至無限項之和，

$$\frac{243}{1-r} = 4096 - 3367 + 243$$

1M+1A

$$243 = 972 - 972r$$

$$r = \frac{3}{4}$$

1A

考慮無限項之和，

$$\frac{a}{1-r} = 4096$$

1M

$$a = 1024$$

1A

首項為 1024。