

REG-GS-2324-ASM-SET 1-MATH

建議題解

多項選擇題

1. A	2. A	3. C	4. C	5. A
6. A	7. C	8. D	9. D	10. C
11. A	12. A	13. C	14. B	15. B
16. D	17. D	18. B	19. C	20. A
21. A	22. B	23. B	24. B	25. C
26. D	27. B	28. B	29. B	30. B

1. A

可得 $b - a = c - b$ 。

I. $\checkmark$ 。 $\frac{2^b}{2^a} = 2^{b-a}$ 及 $\frac{2^c}{2^b} = 2^{c-b} = 2^{b-a}$ 。

II. $\times$ 。考慮當 $a = 1$ 、 $b = 2$ 及 $c = 3$ 時。

III. $\times$ 。當 $k = 0$ 時，數列的項均為未定義。

2. A

I. $\checkmark$ 。可得 $\frac{y_2}{y_1} = \frac{y_3}{y_2} = \frac{y_4}{y_3} = \dots = \frac{y_n}{y_{n-1}}$ 。

因此，可得 $\frac{x_1 y_2}{x_1 y_1} = \frac{x_1 y_3}{x_1 y_2} = \frac{x_1 y_4}{x_1 y_3} = \dots = \frac{x_1 y_n}{x_1 y_{n-1}}$ 。

它是等比數列。

II. $\checkmark$ 。可得 $\frac{x_2}{x_1} = \frac{x_3}{x_2} = \dots = \frac{x_n}{x_{n-1}}$ 及 $\frac{y_2}{y_1} = \frac{y_3}{y_2} = \dots = \frac{y_n}{y_{n-1}}$ 。

因此，可得 $\frac{x_2 y_2}{x_1 y_1} = \frac{x_3 y_3}{x_2 y_2} = \dots = \frac{x_n y_n}{x_{n-1} y_{n-1}}$ 。

它是等比數列。

III. $\times$ 。考慮等比數列 1, 3, 9, 27 及 1, 2, 4, 8。

$x_1 - y_1 = 0$, $x_2 - y_2 = 1$, $x_3 - y_3 = 5$, $x_4 - y_4 = 19$ 不是等比數列。

3. C

可得 $\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$ 。

I. $\checkmark$ 。 $\frac{b^2}{a^2} = \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \left(\frac{c}{b}\right)^2 = \frac{c^2}{b^2}$

II. $\times$ 。取 $a = 1$ 、 $b = 2$ 、 $c = 4$ 及 $k = 2$ 。

3, 4, 6 不是等比數列。

III. $\checkmark$ 。 $\frac{kb}{ka} = \frac{b}{a} = \frac{c}{b} = \frac{kc}{kb}$

4. C

- I. ✓。公比 = 3^3
II. ✗。 $\frac{33}{3} = 11$ 及 $\frac{333}{33} \neq 11$ 。
III. ✓。公比 = -10

5. A

- I. ✓。 $\frac{4^b}{4^a} = 4^{b-a} = 4^{c-b} = \frac{4^c}{4^b}$ 。
II. ✓。 $(4b+4) - (4a+4) = b-a = c-b = (4c+4) - (4b+4)$ 。
III. ✗。取 $a = 10$ 、 $b = 100$ 及 $c = 190$ 。則 $\log a = 1$ 、 $\log b = 2$ 及 $\log c = \log 190 \neq 3$ 。

6. A

- I. ✓。 $r = 2$ 。
II. ✓。 $r = 2$ 。
III. ✗。取 $k = 2$ 。該數列變成 1, 2, 3, 4，即沒有公比。

7. C

$$\Delta = (2b)^2 - 4ac = 0$$

$$b^2 = ac$$

$$\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$$

a, b, c 成一等比數列。

- I. ✗。考慮當 $a = 1$ 、 $b = 3$ 及 $c = 9$ 時的情況。
II. ✓。 $\log b - \log a = \log \frac{b}{a} = \log \frac{c}{b} = \log c - \log b$ 。
III. ✓。 $\frac{2018b}{2018a} = \frac{b}{a} = \frac{c}{b} = \frac{2018c}{2018b}$ 。

8. D

- I. ✗。取 $a = 1$ 、 $b = 2$ 及 $c = 4$ 。
 $a+3, b+3, c+3$ 不是等比數列。
II. ✓。可得 $\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$ 。
因此，可得 $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ 及 c, b, a 為等比數列。
III. ✓。可得 $\frac{1}{b} \div \frac{1}{a} = \frac{a}{b}$ 及 $\frac{1}{c} \div \frac{1}{b} = \frac{b}{c} = \frac{a}{b}$ 。

9. D

I. ✗。 $a = 1, b = -2, c = 4$ 是等比數列。

可得 $b < a < c$ 。

II. ✓。可得 $\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$ 。

因此， $b^2 = ac$ 。

III. ✓。可得 $\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$ 。

因此， $\frac{b}{c} = \frac{a}{b}$ 及 c, b, a 為等比數列。

10. C

$$\frac{x-4}{3x} = \frac{x-1}{5} \div (x-4)$$

$$5(x-4)^2 = 3x(x-1)$$

$$2x^2 - 37x + 80 = 0$$

$$x = \frac{5}{2} \quad \text{或} \quad 16$$

11. A

$$\frac{x}{x-4} = \frac{x+12}{x}$$

$$x^2 = (x-4)(x+12)$$

$$0 = 8x - 48$$

$$x = 6$$

$$\text{公比} = \frac{x}{x-4} = 3$$

12. A

$$\frac{4n-3}{2n+3} = \frac{8n+1}{4n-3}$$

$$(4n-3)^2 = (2n+3)(8n+1)$$

$$0 = 50n - 6$$

$$n = \frac{3}{25}$$

13. C

$$\frac{x+2}{x-2} = \frac{18}{x+2}$$

$$(x+2)^2 = 18(x-2)$$

$$x^2 - 14x + 40 = 0$$

$$x = 4 \quad \text{或} \quad 10$$

$$\text{當 } x = 4, \text{ 公比} = \frac{18}{4+2} = 3。$$

$$\text{當 } x = 10, \text{ 公比} = \frac{18}{10+2} = \frac{3}{2}。$$

14. B

$$\frac{a-2}{a-7} = \frac{a+2}{a-2}$$

$$(a-2)^2 = (a-7)(a+2)$$

$$0 = -a - 18$$

$$a = -18$$

$$\text{公比} = \frac{-18-2}{-18-7} = \frac{4}{5}$$

15. B

$$k-5 = 5-h \quad \text{及} \quad \frac{4}{h} = \frac{k}{4}$$

$$h+k = 10 \quad hk = 16$$

$$h^2 + k^2 = (h+k)^2 - 2hk$$

$$= 10^2 - 2(16)$$

$$= 68$$

16. D

$$\frac{-h}{h-7} = \frac{h+8}{-h}$$

$$(-h)^2 = (h-7)(h+8)$$

$$0 = h - 56$$

$$h = 56$$

$$\text{公比} = \frac{-56}{56-7} = -\frac{8}{7}$$

17. D

$$\frac{ar^4}{ar^2} = \frac{36}{12}$$

$$r^2 = 3$$

$$r = \pm\sqrt{3}$$

$$\text{公比為 } \sqrt{3} \text{ 或 } -\sqrt{3}。$$

18. B

可得 $(ar)(ar^2) = 18$ 及 $(ar^2)(ar^3) = 72$ 。

$$\frac{a^2r^5}{a^2r^3} = \frac{72}{18}$$

$$r^2 = 4$$

$$T_5 \times T_6 = (ar^4)(ar^5)$$

$$= (a^2r^3)(r^6)$$

$$= 18(4)^3$$

$$= 1152$$

19. C

可得 $a + ar = 2$ 及 $ar^5 + ar^6 = -486$ 。

$$\frac{ar^5 + ar^6}{a + ar} = \frac{-486}{2}$$

$$\frac{ar^5(1+r)}{a(1+r)} = -243$$

$$r^5 = (-3)^5$$

$$r = -3$$

$$\text{首項} = \frac{2}{1+r} = -1$$

20. A

首項 $= -\frac{1}{4}$ 及公比 $= \frac{2}{-1} = -2$ 。

$$\begin{aligned}\text{第 } n \text{ 項} &= -\frac{1}{4}(-2)^{n-1} \\ &= -(-2)^{-2}(-2)^{n-1} \\ &= -(-2)^{n-3}\end{aligned}$$

21. A

$$\begin{aligned}\text{公比} &= \frac{y}{x} \\ \text{首項} &= \frac{x}{\left(\frac{y}{x}\right)^3} \\ &= \frac{x^4}{y^3}\end{aligned}$$

22. B

$$\begin{aligned}\text{首項} &= 3 \text{ 及公比} = \frac{1}{2}。 \\ \text{第 } (2n+1) \text{ 項} &= 3\left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \\ &= \frac{3}{2^{2n}}\end{aligned}$$

23. B

$$\begin{aligned}\text{首項} &= -2 \text{ 及公比} = \frac{-1}{2}。 \\ \text{通項} &= -2\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ &= (-2)(-2)^{1-n} \\ &= (-2)^{2-n}\end{aligned}$$

24. B

$$\begin{aligned}\frac{ar^6}{ar^3} &= \frac{-1458}{2} \\ r^3 &= -729 \\ r &= -9\end{aligned}$$

25. C

設公比為 r 。

$$abc = 64$$

$$\left(\frac{b}{r}\right)b(br) = 64$$

$$b^3 = 64$$

$$b = 4$$

$$a + c = (a + b + c) - b = 14 - 4 = 10$$

26. D

$$3r^4 = 27$$

$$r = \sqrt[4]{3} \quad \text{或} \quad -\sqrt[4]{3} \quad (\text{捨去})$$

$$xyz = (3r)(3r^2)(3r^3)$$

$$= 3r^6$$

$$= 81$$

27. B

$$1(k^3)^{n-1} = k^{3m+9}$$

$$k^{3n-3} = k^{3m+9}$$

$$3n - 3 = 3m + 9$$

$$n = m + 4$$

共有 $m + 4$ 項。

28. B

$$972 \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{4}{27}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{6561}$$

$$(n-1) \log \frac{1}{3} = \log \frac{1}{6561}$$

$$n = 9$$

共有 9 項。

29. B

$$(-8) \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} > -300$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} < \frac{75}{2}$$

$$(n-1) \log \frac{3}{2} < \log \frac{75}{2}$$

$$n < 9.94$$

共有 9 項。

30. B

$$4(3)^{n-1} > 1800$$

$$3^{n-1} > 450$$

$$(n-1) \log 3 > \log 450$$

$$n > 6.56$$

$$\text{所求項} = 4(3)^{7-1}$$

$$= 2916$$

結構式試題

$$31. \quad (a) \quad \frac{-16}{32-2k} = \frac{-k}{4} \div (-16) \quad 1M$$

$$256 = \frac{k^2}{2} - 8k$$

$$0 = \frac{k^2}{2} - 8k - 256$$

$$k = 32 \quad \text{或} \quad -16 \quad 1A$$

(b) $k = -16$ 而該數列的正值項為 64, 4, ...

設所求數目為 n 。

$$64 \left(\frac{4}{64} \right)^{n-1} > 1 \times 10^{-30} \quad 1M$$

$$(n-1) \log \frac{1}{16} > \log \frac{1 \times 10^{-30}}{64} \quad 1M$$

$$n < 27.4$$

所求數目為 27。 1A

32. (a) 設首項及公比分別為 a 及 r 。

$$\frac{ar^4}{ar^2} = \frac{400}{900} \quad 1M$$

$$r^2 = \frac{4}{9}$$

$$\text{首項} = \frac{400}{r^4}$$

$$= \frac{400}{\left(\frac{4}{9}\right)^2}$$

$$= 2025 \quad 1A$$

(b) 公比 = $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$ 。 1A

$$2025 \left(\frac{2}{3} \right)^n - 2025 \left(\frac{2}{3} \right)^{2n} < 2 \times 10^{-5}$$

$$-2025 \left(\frac{2}{3} \right)^{2n} + 2025 \left(\frac{2}{3} \right)^n - 2 \times 10^{-5} < 0$$

$$\left(\frac{2}{3} \right)^n < 9.8765 \times 10^{-9} \quad \text{或} \quad \left(\frac{2}{3} \right)^n > 1.00 \quad (\text{捨去}) \quad 1A$$

$$n \log \frac{2}{3} < \log 9.8765 \times 10^{-9} \quad 1M$$

$$n > 45.5$$

n 的最小值為 46。 1A

33. (a) $(x+2)(x-2) = 8(x-1)$

$$x^2 - 8x + 4 = 0$$

因此， $p = 8$ 及 $q = 4$ 。

1A+1A

(b) 公比 $= \frac{\log 8}{\log 4} = \frac{3 \log 2}{2 \log 2} = \frac{3}{2}$ 。

1M

$$(\log 4) \left(\frac{3}{2}\right)^\alpha + (\log 4) \left(\frac{3}{2}\right)^{2\alpha} < \log 2^{2020}$$

1M

$$2(1.5)^\alpha + 2(1.5)^{2\alpha} < 2020$$

$$(1.5)^{2\alpha} + 1.5^\alpha - 1010 < 0$$

$$\frac{-1 - \sqrt{4041}}{2} < 1.5^\alpha < \frac{-1 + \sqrt{4041}}{2}$$

由於 $1.5^\alpha > 0$ ，

$$0 < 1.5^\alpha < \frac{-1 + \sqrt{4041}}{2}$$

$$\alpha \log 1.5 < \log \frac{-1 + \sqrt{4041}}{2}$$

1M

$$\alpha < 8.49$$

α 的最大值為 8。

1A

34. (a) $T(n) = 1701 \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

1A

(b) $1701 \left(-\frac{1}{3}\right)^{k-1} = -\frac{7}{6561}$

1M

$$\left(-\frac{1}{3}\right)^{k-1} = \left(-\frac{1}{3}\right)^{13}$$

1M

$$k = 14$$

1A

(c) 考慮負值項 $-567, -63, -7, \dots$

假定所求數目為 n 。

$$-567 \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1} < -\frac{1}{100}$$

1M

$$\frac{1}{9^{n-1}} > \frac{1}{56700}$$

$$(n-1) \log \frac{1}{9} > \log \frac{1}{56700}$$

1M

$$n < 5.98$$

共有 5 項。

1A