

REG-QE-2324-ASM-SET 2-MATH

建議題解

多項選擇題

1. C	2. B	3. A	4. C	5. D
6. E	7. D	8. D	9. C	10. B
11. A	12. D	13. A	14. B	15. A
16. B	17. A	18. A	19. C	20. C
21. C	22. A	23. D	24. B	25. C
26. A	27. B	28. A	29. C	30. C

1. C

設 x 截距為 α 及 β ，其中 $\alpha > 0 > \beta$ 。

則 α 及 β 為方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的根。

I. $\checkmark$ 。由於方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 有兩根異實根 α 及 β ，可得 $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ 。

II. $\times$ 。取 $\alpha = 2$ 及 $\beta = -1$ 。

$$\begin{aligned}\alpha + \beta &= -\frac{b}{a} \\ \frac{b}{a} &= -1 < 0\end{aligned}$$

III. $\checkmark$ 。留意 $\alpha\beta < 0$ 。

$$\begin{aligned}\alpha\beta &= \frac{c}{a} \\ \frac{c}{a} &< 0\end{aligned}$$

2. B

設 $OP = \alpha$ 及 $OQ = \beta$ 。

則 α 及 β 為方程 $x^2 - 4x + k = 0$ 的根。

$$\begin{aligned}OP + OQ &= \alpha + \beta \\ &= 4\end{aligned}$$

3. A

$$(x + 2)(x - 3) + 4 = 0$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

兩根之積為 -2 。

4. C

α 及 β 為方程 $x^2 = 5x - 2$ 的根。

該方程可被寫成 $x^2 - 5x + 2 = 0$ 。

$$\alpha + \beta = -\frac{-5}{1} = 5$$

5. D

α 及 β 為方程 $3x = x^2 - 5$ (即 $x^2 - 3x - 5 = 0$) 的根。

$$\alpha\beta = \frac{-5}{1} = -5。$$

6. E

α 及 β 為方程 $3x^2 - hx - b = 0$ 的根。

$$\alpha + \beta = -\frac{-h}{3} = \frac{h}{3}。$$

7. D

α 及 β 為方程 $4x = x^2 - 3$ 的根。

該方程可被寫成 $x^2 - 4x - 3 = 0$ 。

$$\alpha + \beta = -\frac{-4}{1} = 4$$

8. D

$$(x + 3)(x - 2) = 4x$$

$$x^2 - 3x - 6 = 0$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{3 \pm \sqrt{3^2 + 4(6)}}{2} \\ &= \frac{3\sqrt{33}}{2} \end{aligned}$$

I. $\times$ 。 $\alpha + \beta = \frac{3}{1} \neq -1$

II. $\times$ 。 α 及 β 均為無理數。

9. C

$$\alpha + \beta = \frac{10}{2} = 5 \text{ 及 } \alpha\beta = \frac{k}{2}$$

$$\begin{aligned} (3\alpha + \beta)(\alpha + 3\beta) &= 3\alpha^2 + 10\alpha\beta + 3\beta^2 \\ &= 3(\alpha + \beta)^2 + 4\alpha\beta \\ &= 3(5)^2 + 4 \times \frac{k}{2} \\ &= 75 + 2k \end{aligned}$$

10. B

$\sin \theta + \cos \theta = 0$ 及 $\sin \theta \cos \theta = k$ 。

$$(\sin \theta + \cos \theta)^2 = 0^2$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta = 0$$

$$1 + 2k = 0$$

$$k = -\frac{1}{2}$$

11. A

$\alpha + \beta = 3$ 及 $\alpha\beta = -1$ 。

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} &= \frac{\beta + \alpha}{\alpha\beta} \\ &= \frac{3}{-1} \\ &= -3\end{aligned}$$

12. D

$\alpha + \beta = 5$ 及 $\alpha\beta = -1$ 。

$$\begin{aligned}\alpha^3\beta + \beta^3\alpha &= \alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2) \\ &= \alpha\beta[(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta] \\ &= -1[5^2 - 2(-1)] \\ &= -27\end{aligned}$$

13. A

m 及 n 為方程 $2x^2 + 5x = 14$ (即 $2x^2 + 5x - 14 = 0$) 的根。

$m + n = \frac{-5}{2}$ 及 $mn = -7$ 。

$$\begin{aligned}(m + 2)(n + 2) &= mn + 2(m + n) + 4 \\ &= -7 + 2\left(\frac{-5}{2}\right) + 4 \\ &= -8\end{aligned}$$

14. B

$p + q = 1$ 。

$$\begin{aligned}(2^{p-2})(2^{q-2}) &= 2^{p+q-4} \\ &= 2^{1-4} \\ &= \frac{1}{8}\end{aligned}$$

15. A

可得 $\alpha + \beta = 4$ 及 $\alpha\beta = -2$ 。

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha-1} + \frac{1}{\beta-1} &= \frac{(\beta-1) + (\alpha-1)}{(\alpha-1)(\beta-1)} \\ &= \frac{\alpha + \beta - 2}{\alpha\beta - (\alpha + \beta) + 1} \\ &= \frac{4 - 2}{-2 - 4 + 1} \\ &= -\frac{2}{5}\end{aligned}$$

16. B

$\alpha + \beta = -3$ 及 $\alpha\beta = \frac{3}{2}$ 。

$$\begin{aligned}(\alpha - \beta)^2 &= \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 \\ &= (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \\ &= (-3)^2 - 4\left(\frac{3}{2}\right) \\ &= 3\end{aligned}$$

17. A

α 及 β 為方程的根。

$$x^2 = 7x - 3$$

$$x^2 - 7x + 3 = 0$$

$\alpha + \beta = 7$ 及 $\alpha\beta = 3$ 。

$$\begin{aligned}(\alpha - 2)(\beta - 2) &= \alpha\beta - 2\alpha - 2\beta + 4 \\ &= 3 - 2(7) + 4 \\ &= -7\end{aligned}$$

18. A

$\alpha + \beta = 5$ 及 $\alpha\beta = 3$ 。

$$\begin{aligned}\alpha^2 + \beta^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \\ &= 5^2 - 2(3) \\ &= 19\end{aligned}$$

19. C

α 及 β 為方程 $x^2 = 4x + 3$ (即 $x^2 - 4x - 3 = 0$) 的根。

$\alpha + \beta = 4$ 及 $\alpha\beta = -3$ 。

$$\begin{aligned}(\alpha + 1)(\beta + 1) &= \alpha\beta + (\alpha + \beta) + 1 \\ &= -3 + 4 + 1 \\ &= 2\end{aligned}$$

20. C

α 及 β 為 $x^2 = 3x + 4$ ($x^2 - 3x - 4 = 0$) 的根。

$$\begin{aligned}\alpha^2 + \beta^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \\ &= 3^2 - 2(-4) \\ &= 17\end{aligned}$$

21. C

a 及 b 均為方程 $2x^2 = 6x - k$ 的根，即 $2x^2 - 6x + k = 0$ 。

故此， $a + b = 3$ 及 $ab = \frac{k}{2}$ 。

$$\begin{aligned}a^2 + 3b &= \frac{6a - k}{2} + 3b \\ &= 3(a + b) - \frac{k}{2} \\ &= 9 - \frac{k}{2}\end{aligned}$$

22. A

$$\beta^2 - 2\beta + k = 0$$

$$\beta^2 = 2\beta - k$$

$$2\alpha + \beta^2 = 2\alpha + (2\beta - k)$$

$$= 2(\alpha + \beta) - k$$

$$= 2(2) - k$$

$$= 4 - k$$

23. D

α 為 $x^2 + 2x - 6 = 0$ 的根。

$$\alpha^2 + 2\alpha - 6 = 0$$

$$\alpha^2 = -2\alpha + 6$$

$$\alpha^2 - 2\beta = (-2\alpha + 6) - 2\beta$$

$$= -2(\alpha + \beta) + 6$$

$$= -2(-2) + 6$$

$$= 10$$

24. B

β 為該方程的根。

$$\beta^2 - 2\beta - 1 = 0$$

$$\beta^2 = 2\beta + 1$$

可得 $\alpha + \beta = 2$ 及 $\alpha\beta = -1$ 。

$$\begin{aligned} 3\beta^2 + 6\alpha &= 3(2\beta + 1) + 6\alpha \\ &= 6(\alpha + \beta) + 3 \\ &= 6(2) + 3 \\ &= 15 \end{aligned}$$

25. C

$$\alpha^2 + \beta^2 = 11$$

$$(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 11$$

$$(4)^2 - 2(m) = 11$$

$$m = \frac{5}{2}$$

26. A

$$-4 = -\frac{-(2a + 3b)}{a}$$

$$\frac{b}{a} = -2$$

$$\text{兩根之積} = -\frac{b}{a} = 2$$

27. B

設 α 及 β 為該兩個數字。

$\alpha + \beta = 34$ 及 $\alpha\beta = 120$ 。

α 及 β 為方程 $x^2 - 34x + 120 = 0$ 的根，即 4 及 30。

所求之差 = $30 - 4 = 26$ 。

28. A

α 及 β 為方程的根。

$$x = x^2 - 1$$

$$0 = x^2 - x - 1$$

$\alpha + \beta = 1$ 及 $\alpha\beta = -1$ 。

$$(\alpha + 1) + (\beta + 1) = \alpha + \beta + 2 \quad \text{及} \quad (\alpha + 1)(\beta + 1) = \alpha\beta + \alpha + \beta + 1$$

$$= 1 + 2$$

$$= -1 + 1 + 1$$

$$= 3$$

$$= 1$$

所求方程為 $x^2 - 3x + 1 = 0$ 。

29. C

設方程的根為 α 及 3α 。

$$\alpha + 3\alpha = -\frac{-12}{2}$$

$$4\alpha = 6$$

$$\alpha = \frac{3}{2}$$

考慮兩根之積。

$$\left(\frac{3}{2}\right)\left(3 \times \frac{3}{2}\right) = \frac{-k}{2}$$

$$\frac{27}{4} = -\frac{k}{2}$$

$$k = -\frac{27}{2}$$

30. C

$$\alpha + \beta = -\frac{10}{1}$$

$$\alpha + \frac{3\alpha}{2} = -10$$

$$\alpha = -4$$

$$\beta = -6$$

$$\alpha\beta = \frac{k}{1}$$

$$(-4)(-6) = k$$

$$k = 24$$

結構式試題

31. (a) 可得 $\alpha + \beta = -5$ 及 $\alpha\beta = 2$ 。 1A

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} &= \frac{\beta + \alpha}{\alpha\beta} \\ &= \frac{-5}{2}\end{aligned}$$

1A

(b) $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$

$$\begin{aligned}&= (-5)^2 - 2(2) \\ &= 21\end{aligned}$$

1A

(c) $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta}$

$$= \frac{21}{2}$$

1A

32. (a) $\alpha + \beta = \frac{k+3}{2}$ 1A

$$\alpha\beta = \frac{-6}{2} = -3$$

1A

(b) $\alpha^2 + \beta^2 = 7$

$$(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 7$$

1M

$$\begin{aligned}\left(\frac{k+3}{2}\right)^2 - 2(-3) &= 7 \\ \frac{k^2}{4} + \frac{3k}{2} + \frac{5}{4} &= 0\end{aligned}$$

1A

$$k = -1 \quad \text{或} \quad -5$$

1A

33. (a) $\Delta = k^2 - 4(1)(-5)$ 1M

$$= k^2 + 20$$

1A

$$> 0$$

同意該宣稱。 1A

- (b) 設兩根為 α 及 $\alpha + 6$ 。

$$\alpha(\alpha + 6) = -5$$

1M

$$\alpha^2 + 6\alpha + 5 = 0$$

$$\alpha = -1 \quad \text{或} \quad -5$$

1A

當 $\alpha = -1$ 時，兩根為 -1 及 5 。

$$k = -[(-1) + 5] = -4$$

1A

當 $\alpha = -5$ 時，兩根為 -5 及 1 。

$$k = -[(-5) + 1] = 4$$

1A

34. (a) 設兩根為 α 及 $4\alpha + 2$ 。

$$\alpha + (4\alpha + 2) = -\frac{-(5p + 19)}{2} \quad 1M$$

$$\alpha = \frac{p + 3}{2}$$

考慮兩根之積。

$$\alpha(4\alpha + 2) = \frac{10p^2 + 4p + 12}{2}$$

$$\left(\frac{p + 3}{2}\right)\left[4\left(\frac{p + 3}{2}\right) + 2\right] = 5p^2 + 2p + 6 \quad 1M$$

$$(p + 3)^2 + (p + 3) = 5p^2 + 2p + 6$$

$$-4p^2 + 5p + 6 = 0$$

$$p = 2 \quad \text{或} \quad -\frac{3}{4} \quad 1A$$

- (b) 當 $p = 2$ ，

$$2x^2 - 29x + 60 = 0$$

$$x = \frac{5}{2} \quad \text{或} \quad 12 \quad 1A$$

當 $p = -\frac{3}{4}$ ，

$$2x^2 - \frac{61x}{4} + \frac{117}{8} = 0$$

$$x = \frac{13}{2} \quad \text{或} \quad \frac{9}{8} \quad 1A$$

35. (a) $\alpha + \beta = \frac{1 - k}{3} \quad 1A$

$$\alpha\beta = \frac{-12}{3} = -4 \quad 1A$$

- (b) $\alpha^2 + \beta^2 = 9$

$$(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 9 \quad 1M$$

$$\left(\frac{1 - k}{3}\right)^2 - 2(-4) - 9 = 0$$

$$\frac{k^2}{9} - \frac{2k}{9} - \frac{8}{9} = 0 \quad 1A$$

$$k = 4 \quad \text{或} \quad -2 \quad 1A$$

- (c) $k = 4$ 。 1A

$$3x^2 + 3x - 12 = 0$$

$$x^2 + x - 4 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(-4)}}{2(1)} \quad 1M$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \quad 1A$$