

REG-AS-2324-ASM-SET 2-MATH

建議題解

多項選擇題

- | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1. A | 2. A | 3. C | 4. C | 5. A |
| 6. D | 7. D | 8. B | 9. A | 10. B |
| 11. B | 12. D | 13. A | 14. A | 15. A |
| 16. B | 17. D | 18. C | 19. C | 20. A |
| 21. C | 22. C | 23. A | 24. A | 25. C |
| 26. D | 27. D | 28. A | 29. B | 30. A |

1. A

設 a 及 d 分別為首項及公差。

$$\begin{cases} a + 5d = 87 \\ a + 16d = 219 \end{cases}$$

求解後，可得 $a = 27$ 及 $d = 12$ 。

$$\begin{aligned} \text{所求之和} &= \frac{[27 + (27 + (n-1)12)]n}{2} \\ &= 21n + 6n^2 \end{aligned}$$

2. A

$$\begin{aligned} \text{第 18 項} &= 6(18)^2 - 6(17)^2 \\ &= 210 \end{aligned}$$

3. C

設 a 及 d 分別為首項及公差。

$$\begin{cases} a + 12d = 53 \\ \frac{(2a + 13d)14}{2} = 434 \end{cases}$$

求解後，可得 $a = 5$ 及 $d = 4$ 。

$$\text{第 3 項} = 5 + 2(4) = 13$$

4. C

$$\text{公差} = \log 10 - \log 2 = \log 5$$

$$\begin{aligned} \text{所求之和} &= \frac{[\log 2 + (\log 2 + 6 \log 5)](7)}{2} \\ &= 7(\log 2 + 3 \log 5) \\ &= 7 \log(2 \times 5^3) \\ &= 7 \log 250 \end{aligned}$$

5. A

$$\text{公差} = \frac{61 - 26}{23 - 18} = 7; \text{首項} = 26 - (18 - 1)(7) = -93。$$

$$\text{I. } \checkmark \circ a_{14} = -93 + (14 - 1)(7) = -2 < 0$$

$$\text{II. } \checkmark \circ a_1 - a_2 = -(\text{公差}) = -7$$

$$\text{III. } \times \circ a_{27} = 89 \circ \text{所求之和} = \frac{(a_1 + a_{27})(27)}{2} = -54 < 0$$

6. D

$$\text{第 330 項} = 2011 + 329(-6)$$

$$= 37$$

$$\text{第 340 項} = 2011 + 339(-6)$$

$$= -23$$

$$\text{所求之和} = \frac{[37 + (-23)](11)}{2}$$

$$= 77$$

7. D

$$\text{所求之和} = \frac{[-4 + (-4 + 40(11))]41}{2}$$

$$= 8856$$

8. B

$$\text{公差} = \frac{25 - 9}{4}$$

$$= 4$$

$$\text{所求之和} = \frac{\{[9 + 10(4)] + [9 + 14(4)]\}5}{2}$$

$$= 285$$

9. A

$$\frac{[-35 + (-35) + (n - 1)4]n}{2} = -105$$

$$2n^2 - 37n + 105 = 0$$

$$n = 15 \quad \text{或} \quad \frac{7}{2} \quad (\text{捨去})$$

10. B

$$\text{公差} = \frac{19 - 15}{2}$$

$$= 2$$

$$a_{17} + a_{18} + \dots + a_{26}$$

$$= \frac{[(15 + 16(2)) + (15 + 25(2))]10}{2}$$

$$= 560$$

11. B

6 的倍數為 402, 408, ..., 996。

設項數為 n 。

$$402 + (n - 1)6 = 996$$

$$n = 100$$

$$\begin{aligned}\text{所求之和} &= \frac{(402 + 996)100}{2} \\ &= 69\,900\end{aligned}$$

12. D

$$(p - 12) - (1 - p) = (7 - p) - (p - 12)$$

$$p = 8$$

該等差數列的首三項為 -7 、 -4 及 -1 。

首項及公差分別為 -7 及 3 。

$$\text{I. } \checkmark \circ \text{第 } 36 \text{ 項} = -7 + 35(3) = 98$$

$$\text{II. } \checkmark \circ -7 + (n - 1)3 < 100$$

$$n < 36.7$$

該數值恰好有 36 項小於 100。

$$\begin{aligned}\text{III. } \checkmark \circ \text{所求之和} &= \frac{[T(1) + T(99)]50}{2} \\ &= \frac{[-7 + [-7 + 98(3)]]50}{2} \\ &= 7000\end{aligned}$$

13. A

$$\begin{aligned}\text{第 } 7 \text{ 項} &= [7^2 - 8(7)] - [6^2 - 8(6)] \\ &= 5\end{aligned}$$

14. A

設 a 及 d 分別為首項及公差。

$$\begin{cases} a + 7d = 11 \\ \frac{(a + 11)8}{2} = 32 \end{cases}$$

求解後，可得 $a = -3$ 及 $d = 2$ 。

$$\text{第 } 3 \text{ 項} = -3 + 2(2) = 1$$

15. A

$$\begin{aligned}\text{所求之和} &= \frac{[(5 - 3(1)) + (5 - 3(5))]5}{2} \\ &= -20\end{aligned}$$

16. B

偶整數為 2, 8, 14, ..., 98。

設項數為 n 。

$$2 + (n - 1)6 = 98$$

$$n = 17$$

$$\begin{aligned}\text{所求之和} &= \frac{(2 + 98)17}{2} \\ &= 850\end{aligned}$$

17. D

整數為 4, 5, 6, ..., 24。

$$\begin{aligned}\text{所求之和} &= \frac{(4 + 24)21}{2} \\ &= 294\end{aligned}$$

18. C

$$\begin{aligned}\text{所求之和} &= \frac{[(20 + 3(1)) + (20 + 3(16))]\cdot 16}{2} \\ &= 728\end{aligned}$$

19. C

3 的倍數為 201, 204, ..., 297。

設項數為 n 。

$$201 + (n - 1)3 = 297$$

$$n = 33$$

$$\begin{aligned}\text{所求之和} &= \frac{(201 + 297)33}{2} \\ &= 8217\end{aligned}$$

20. A

$$\text{公差} = \frac{-7 + 13}{2} = 3$$

$$\text{I. } \checkmark。 \text{第 11 項} = -13 + (11 - 1)(3) = 17$$

$$\text{II. } \checkmark。 \text{首兩個奇數項為 } -13 \text{ 及 } -7。$$

首 50 個奇數項之和

$$\begin{aligned}&= \frac{[-13 + (-13 + (50 - 1)6)]50}{2} \\ &= 6700\end{aligned}$$

$$\text{III. } \times。 \text{設項數為 } n。$$

$$-13 + (n - 1)(3) < 200$$

$$n < 72$$

該數列共有 71 項小於 200。

21. C

設 a 為首項。

$$\frac{(a+8)7}{2} = -7$$

$$a = -10$$

22. C

$$\begin{aligned} \text{第 4 項} &= 4(13 - 2(4)) - 3(13 - 2(3)) \\ &= -1 \end{aligned}$$

23. A

設 a 及 d 分別為首項及公差。

$$\begin{cases} a + 12d = 78 \\ a + 20d = 46 \end{cases}$$

求解後，可得 $a = 126$ 及 $d = -4$ 。

I. $\checkmark$ 。 $a_{30} = 126 + 29(-4) = 10 > 0$

II. $\checkmark$ 。 $a_3 - a_5 = -2d = 8 > 0$

III. $\times$ 。

$$\begin{aligned} a_{15} + a_{16} + a_{17} + \dots + a_{50} &= \frac{(a_{15} + a_{50})36}{2} \\ &= \frac{(70 - 70)36}{2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

24. A

公差為 4。

$$\frac{(2a_1 + 35(4))36}{2} = 1080$$

$$a_1 = -40$$

25. C

I. $\checkmark$ 。解 $2n - 19 = 25$ ，可得 $n = 22$ 。因此，25 為第 22 項。

II. $\times$ 。 $2n - 19 < 0$

$$n < 9.5$$

共有 9 個負值項。

III. $\checkmark$ 。首項 $= 2 - 19 = -17$ ，公差 $= 2$ 。
首 n 項之和 $= \frac{[2(-17) + (n-1)(2)]n}{2} = n^2 - 18n$ 。

26. D

設 a 及 d 分別為首項及公差。

$$\begin{cases} \frac{(2a + 4d)5}{2} = 5 \\ \frac{(2a + 11d)12}{2} = 96 \end{cases}$$

求解後，可得 $a = -3$ 及 $d = 2$ 。

27. D

$$\begin{aligned} \text{所求之和} &= \frac{[(6 - 2) + (6(40) - 2)]40}{2} \\ &= 4840 \end{aligned}$$

28. A

設 a 及 d 分別為首項及公差。

$$\begin{cases} a + (a + d) = 5 \\ a + (a + d) + (a + 2d) = 3 \end{cases}$$

求解後，可得 $a = 4$ 及 $d = -3$ 。

29. B

公差為 -4 。

$$\begin{aligned} \frac{(2a_1 + 32(-4))33}{2} &= 462 \\ a_1 &= 78 \end{aligned}$$

30. A

$$10^3 \times 10^6 \times 10^9 \times \dots \times 10^{3+(n-1)3} < 10^{360}$$

$$3 + 6 + 9 + \dots + 3n < 360$$

$$\frac{(3 + 3n)n}{2} < 360$$

$$\frac{3n^2}{2} + \frac{3n}{2} - 360 < 0$$

$$-16 < n < 15$$

n 的最大值為 14。

結構式試題

31. (a) 設首項及公差分別為 a 及 d 。

$$\begin{cases} \frac{4}{2}[2a + 3d] = -2 \\ \frac{9}{2}[2a + 8d] = 63 \end{cases} \quad 1M$$

求解後，可得 $a = -5$ 及 $d = 3$ 。 1A

通項 $= -5 + (n - 1)3 = 3n - 8$ 1A

$$\begin{aligned} \text{(b) } T(20) + T(22) + \dots + T(50) &= [3(20) - 8] + [3(22) - 8] + \dots + [3(50) - 8] \\ &= \frac{16}{2}[52 + 142] \quad 1M+1A \\ &= 1552 \quad 1A \end{aligned}$$

32. (a) 設首項及公差分別為 a 及 d 。

$$\begin{cases} \frac{7}{2}(2a + 6d) = 49 \\ a + 7d = 15 \end{cases} \quad 1M$$

求解後， $a = 1$ 及 $d = 2$ 。 1A

通項 $T(n) = 1 + (n - 1)2 = 2n - 1$ 1A

$$\begin{aligned} \text{(b) 所求之和} &= [T(1) + T(3) + \dots + T(51)] - [T(2) + T(4) + \dots + T(50)] \\ &= \frac{26}{2}[2(1) + 25(4)] - \frac{25}{2}[2(3) + 24(4)] \quad 1M+1A \\ &= 51 \quad 1A \end{aligned}$$

33. (a) $k = \frac{-34 - 52}{2} = -43$ 1A

(b) (i) $S(n) = \frac{n}{2}[2(-52) + (n - 1)(9)]$ 1M

$$= \frac{n}{2}(9n - 113) \quad 1A$$

(ii) $-52 + (n - 1)9 < 0$

$$n < \frac{61}{9} \quad 1M$$

最小值 $= S(6)$ 1M

$$= -177 \quad 1A$$

34. (a) 設 d 為該數列的公差。

$$-321 + (23 - 1)d = -123 \quad 1M$$

$$d = 9 \quad 1A$$

該數列的公差為 9。

(b) $\frac{[2(-321) + (n - 1)9]n}{2} > 0$ 1M

$$(9n - 651)n > 0$$

$$n < 0 \quad \text{或} \quad n > \frac{651}{9} \quad 1A$$

所求之值為 73。 1A

35. (a) $5\alpha - 18 = \alpha^2 - 13\alpha + 63$ 1M

$$0 = \alpha^2 - 18\alpha + 81$$

$$\alpha = 9$$

當 $\alpha = 9$ 時， $\beta = 5(9) - 18 = 27$ 。 1A

因此， $\alpha = 9$ 及 $\beta = 27$ 。

(b) $T(1) = \log 9 = 2 \log 3$ 及 $T(2) = \log 27 = 3 \log 3$ 。 1M

$$\frac{n}{2}[2 \log 9 + (n-1)(\log 27 - \log 9)] > 888$$
 1A

$$\frac{n}{2}(4 \log 3 + (n-1) \log 3) > 888$$

$$(\log 3)n^2 + (3 \log 3)n - 1776 > 0$$

$$n < -62.5 \text{ (捨去)} \quad \text{或} \quad n > 59.5$$
 1M

n 的最小值為 60。 1A

36. (a) $\frac{A(3)}{A(6)} = 9 \div \frac{1}{3}$

$$\frac{\alpha}{\beta^3} \div \frac{\alpha}{\beta^6} = 27$$
 1M

$$\beta^3 = 27$$

$$\beta = 3$$
 1A

可得 $\alpha = 243$ 。 1A

(b) $B(n) = \log_9 \frac{243}{3^n}$

$$= \log_9 243 - n \log_9 3$$
 1M

$$= \frac{5-n}{2}$$

$$B(1) + B(2) + B(3) + \dots + B(n) > 0$$

$$\frac{n}{2} \left[2 + \frac{5-n}{2} \right] > 0$$
 1M

$$-\frac{n^2}{4} + \frac{9n}{4} > 0$$

$$0 < n < 9$$
 1M

n 的最大值為 8。 1A

37. (a) 可得 $\alpha_n + \beta_n = \sqrt{\log_2 3^n}$ 及 $\alpha_n \beta_n = \log_4 \sqrt{3^n}$ 。 1A

$$\begin{aligned}\alpha_n^2 + \beta_n^2 &= (\alpha_n + \beta_n)^2 - 2\alpha_n \beta_n \\ &= \log_2 3^n - 2 \log_4 \sqrt{3^n} \\ &= \frac{n \log 3}{\log 2} - \frac{2 \times \frac{n}{2} \times \log 3}{2 \log 2}\end{aligned}$$

1M

$$= \frac{n \log 3}{2 \log 2}$$

1A

(b) $\left(\frac{1}{8}\right)^{\alpha_5^2 + \beta_5^2} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{\alpha_6^2 + \beta_6^2} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{\alpha_7^2 + \beta_7^2} \cdot \dots \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{\alpha_k^2 + \beta_k^2} > \frac{1}{27^{5k+13}}$

$$(\alpha_5^2 + \beta_5^2) \log \frac{1}{8} + (\alpha_6^2 + \beta_6^2) \log \frac{1}{8} + \dots + (\alpha_k^2 + \beta_k^2) \log \frac{1}{8} > (5k + 13) \log \frac{1}{27}$$

1M

$$-3 \log 2 \cdot \left(\frac{5 \log 3}{2 \log 2} + \frac{6 \log 3}{2 \log 2} + \dots + \frac{k \log 3}{2 \log 2} \right) > -3(5k + 13) \log 3$$

$$5 + 6 + \dots + k > 10k + 26$$

$$\frac{(k+5)(k-4)}{2} < 10k + 26$$

1M

$$\frac{k^2}{2} - \frac{19k}{2} - 36 < 0$$

$$-3.24 < k < 22.2$$

1M

留意 $k \geq 5$ ，可得 $5 \leq k < 22.2$ 。

k 的最大值為 22。 1A