REG-GOF-2223-ASM-SET 5-MATH

建議題解

結構式試題

1. (a) $\log_4 y = -\dfrac{1}{2}x + 3$ 1A

$y = 4^{-\frac{1}{2}x+3}$ 1M

$= 2^{-x} \cdot 64$

$= 64\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$

故此，$k = 64$ 及 $a = \dfrac{1}{2}$。 1A

(b) $h(x) = 4f(x)$ 1A

$= 64\left(\dfrac{1}{2}\right)^x \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2}$

$= 64\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-2}$

$= f(x-2)$

$y = h(x)$ 的圖像可藉 $y = f(x)$ 的圖像向右平移 2 單位。

同意該宣稱。 1A

2. (a) $g(x) = 3x^2 + 12kx + 16k^2 + 8$

$= 3[x^2 + 2(2k)x + (2k)^2] + 4k^2 + 8$ 1M

$= 3(x + 2k)^2 + 4k^2 + 8$

所求坐標為 $\left(-2k,\ 4k^2 + 8\right)$。 1A

(b) $A\left(-2k,\ 4k^2 + 8\right)$ 及 $B\left(2k,\ 8k^2 + 16\right)$ 1A

$\dfrac{BM}{AM} = \dfrac{\triangle OBM \text{ 的面積}}{\triangle OAM \text{ 的面積}} = 3$ 1M

M 的坐標 $= \left(\dfrac{3(-2k) + (2k)}{3 + 1},\ \dfrac{3(4k^2 + 8) + (8k^2 + 16)}{3 + 1}\right)$

$= \left(-k,\ 5k^2 + 10\right)$ 1A

3. (a) $f(x) = x^2 - 6kx + 12k^2 + 6$

$= (x^2 - 6x + 9k^2) + 3k^2 + 6$ 1M

$= (x - 3k)^2 + 3k^2 + 6$

頂點的坐標為 $\left(3k,\ 3k^2 + 6\right)$。 1A

(b) $P\left(3k - 3,\ 3k^2 + 6\right)$ 及 $Q\left(3k + 3,\ -3k^2 - 6\right)$。 1A

考慮由點 $(0,\ 6)$ 至點 P 及至點 Q 的距離。

$\sqrt{(3k - 3)^2 + (3k^2)^2} = \sqrt{(3k + 3)^2 + (-3k^2 - 6 - 6)^2}$ 1M

$-72k^2 - 36k - 144 = 0$

$\Delta = 36^2 - 4(-72)(-144) = -40\,176 < 0$ 1M

該方程沒有實根。

因此，點 R 不存在。 1A

4. (a) $f(x) = 3x^2 - 24kx + 200$

$= 3[x^2 - 2(x)(4k) + (4k)^2] + 200 - 48k^2$ 1M

$= 3(x - 4k)^2 + 200 - 48k^2$

P 的坐標為 $\left(4k,\ 200 - 48k^2\right)$。 1A

(b) (i) Q 的坐標為 $\left(4k - 8,\ 200 - 48k^2\right)$。 1A

外心在 PQ 的垂直平分線上。

$\frac{4k + (4k - 8)}{2} = 4$

$k = 2$ 1A

(ii) 可得 $\angle QPR = 90°$ 及 QR 為圓 PQR 的直徑。 1M

Q 的坐標為 $(0,\ 8)$。

設 R 的坐標為 $(a,\ b)$。

$\frac{a + 0}{2} = 4$ 及 $\frac{b + 8}{2} = -8$ 1M

$a = 8$ $b = -24$

R 的坐標為 $(8,\ -24)$。 1A

5. (a) 當 $y = 0$ 時，$3x^2 - 6mx + 4m^2 = 0$。

$$\Delta = (6m)^2 - 4(3)(4m^2) \quad \text{1M}$$
$$= -12m^2$$
$$< 0$$

該圖像沒有 x 截距。 1

(b) $y = f(x)$

$= 3(x^2 - 2mx + m^2) + m^2$ 1M

$= 3(x - m)^2 + m^2$

頂點的坐標為 $\left(m,\ m^2\right)$。 1A

(c) A 及 B 的坐標分別為 $\left(m,\ m^2\right)$ 及 $(m,\ 0)$。 1A

由於 $\angle OBA = 90°$，外心為 OA 的中點。

外心的坐標為 $\left(\frac{m}{2},\ \frac{m^2}{2}\right)$。 1A

當 $m = 2$ 時，外心的坐標為 $(1,\ 2)$，即不在 $y = x$ 上。 1M

該宣稱不正確。 1A

6. (a) $f(x) = \frac{-1}{3}x^2 - \frac{k}{2}x + k - 1$

$= \frac{-1}{3}\left(x^2 + \frac{3k}{2} + \frac{9k^2}{16}\right) + \frac{3k^2}{16} + k - 1$ 1M

$= \frac{-1}{3}\left(x + \frac{3k}{4}\right)^2 + \frac{3k^2}{16} + k - 1$

S 的坐標為 $\left(-\frac{3k}{4}, \frac{3k^2}{16} + k - 1\right)$。 1A

(b) (i) $g(x) = \frac{3}{2}f(-x)$

T 的坐標為 $\left(\frac{3k}{4}, \frac{9k^2}{32} + \frac{3k}{2} - \frac{3}{2}\right)$。 1A

(ii) 由於 S 為 $\triangle OST$ 的垂心，$\angle OST = 90°$。

$$\frac{\frac{3k^2}{16} + k - 1}{-\frac{3k}{4}} \times \frac{\frac{9k^2}{32} + \frac{3k}{2} - \frac{3}{2} - \frac{3k^2}{16} - k + 1}{\frac{3k}{4} + \frac{3k}{4}} = -1$$ 1M

$$\frac{1}{2}\left(\frac{3k^2}{16} + k - 1\right)^2 = \frac{9k^2}{8}$$

$$\frac{3k^2}{16} + k - 1 = \pm\frac{3k}{2}$$

若 $\frac{3k^2}{16} + k - 1 = \frac{3k}{2}$，

$\frac{3k^2}{16} - \frac{k}{2} - 1 = 0$

$k = 4$ 或 $-\frac{4}{3}$（捨去） 1A

若 $\frac{3k^2}{16} + k - 1 = -\frac{3k}{2}$，

$\frac{3k^2}{16} + \frac{5k}{2} - 1 = 0$

$k \approx -13.7$（捨去） 或 -0.389（捨去）

T 的坐標為 $(3, 9)$。$\triangle OST$ 的外心在 OT 的中點。

所求坐標為 $\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right)$。 1A

7. (a) $f(3) = \dfrac{1}{k+2}[3^2 + (2k-2)3 - 5k - 1]$

$= \dfrac{1}{k+2}(k+2)$

$= 1$

$y = f(x)$ 的圖像通過 A。 1

(b) (i) $g(x) = f(-x) - 2$ 1M

$= \dfrac{1}{k+2}[x^2 - (2k-2)x - 7k - 5]$

$= \dfrac{1}{k+2}[(x - 2(k-1)x + (k-1)^2) - k^2 - 5k - 6]$ 1M

$= \dfrac{1}{k+2}[(x - (k-1)^2) - k^2 - 5k - 6]$

$= \dfrac{1}{k+2}[x - (k-1)]^2 - \dfrac{(k+2)(k+3)}{k+2}$

$= \dfrac{1}{k+2}[x - (k-1)]^2 - k - 3$

M 的坐標為 $(k-1,\ -k-3)$。 1A

(ii) AN 為 $\triangle ANM$ 的外接圓的直徑。

故此，$\angle AMN = 90°$。 1M

$\dfrac{(-k-3)+9}{(k-1)-1} \times \dfrac{1-(-k-3)}{3-(k-1)} = -1$ 1M

$-k^2 + 2k + 24 = k^2 - 6k + 8$

$-2k^2 + 8k + 16 = 0$

$k = 2 + 2\sqrt{3}$ 或 $2 - 2\sqrt{3}$（捨去） 1A

(iii) P 的坐標為 $(-3,\ -1)$。 1A

Q 的坐標為 $\left(1 + 2\sqrt{3},\ -5 - 2\sqrt{3}\right)$。

外心 S 在 AN 上。故此，S 為 AN 的中點。

S 的坐標為 $(2,\ -4)$。 1A

PS 的斜率 $= \dfrac{-1+4}{-3-2} = \dfrac{-3}{5}$ 1M

PQ 的斜率 $= \dfrac{-5-2\sqrt{3}+1}{1+2\sqrt{3}+3} = -1 \neq \dfrac{-3}{5}$

P、Q、S 不共線。

不同意該宣稱。 1A