

REV-AOT-2223-ASM-SET 3-MATH

建議題解

結構式試題

$$\begin{aligned}
 1. \quad (a) \quad DE^2 + BE^2 &= (AE^2 + AD^2) + BE^2 \quad (\text{畢氏定理}) \\
 &= (AE^2 + BE^2) + AD^2 \\
 &= AB^2 + AD^2 \quad (\text{畢氏定理}) \\
 &= BD^2 \quad (\text{畢氏定理})
 \end{aligned}$$

Therefore, $\angle BED = 90^\circ$ (畢氏定理的逆定理)

因此, $DE \perp BC$ 。

評分標準		
情況 1	附有正確理由的任何正確證明。	2
情況 2	未附有正確理由的任何正確證明。	1

(b) 在 $\triangle ABC$ 中,

$$BC^2 = 3^2 + 2^2 - 2(3)(2) \cos 60^\circ \quad 1M$$

$$BC = \sqrt{7} \text{ m}$$

$$\frac{\sqrt{7}}{\sin 60^\circ} = \frac{2}{\sin \angle ABC} \quad 1M$$

$$\angle ABC \approx 40.9^\circ \text{ 或 } 139^\circ \text{ (捨去)}$$

$$\begin{aligned}
 AE &= 3 \sin \angle ABC \\
 &\approx 1.963\,961\,012 \text{ m} \quad 1A
 \end{aligned}$$

在 $\triangle ADE$ 中,

$$\begin{aligned}
 \tan \angle AED &= \frac{1}{AE} \\
 \angle AED &\approx 27.0^\circ \quad 1A
 \end{aligned}$$

所求之角為 27.0° 。

(c) (i) 由於 $AF \geq AE$, 可得 1M

$$\begin{aligned}
 \frac{AD}{AF} &\leq \frac{AD}{AE} \\
 \tan \angle AFD &\leq \tan \angle AED \quad 1M \\
 \angle AFD &\leq \angle AED \quad 1
 \end{aligned}$$

(ii) 由於 $AB > AC$, 當 F 在 B 時, $\angle AFD$ 最小。 1A

$$\begin{aligned}
 \tan \angle ABD &= \frac{1}{3} \quad 1M \\
 \angle ABD &\approx 18.4^\circ
 \end{aligned}$$

$\angle AFD$ 的最小可取值為 18.4° 。 1A

2. (a) $\frac{\sin \angle ABD}{19} = \frac{\sin 80^\circ}{30}$ 1M
 $\angle ABD \approx 38.6^\circ$ 或 141° (捨去) 1A
- (b) (i) $25^2 = 19^2 + 30^2 - 2(19)(30) \cos \angle CDA$ 1M
 $\angle CDA \approx 56.1^\circ$ 1A
- (ii) 設 E 為 BD 上的一點使得 $AE \perp BD$ 。
 設 F 為 CD 上的一點使得 $EF \perp BD$ 。
 所求之角為 $\angle AEF$ 。 1A
 $AE = 19 \sin 80^\circ \approx 18.7 \text{ cm}$ 1M
 $DE = 19 \cos 80^\circ \approx 3.30 \text{ cm}$
 $\angle EDF = \angle ABD \approx 38.6^\circ$
 $EF = DE \tan \angle EDF \approx 2.63 \text{ cm}$
 $DF = \frac{DE}{\cos \angle EDF} \approx 4.22 \text{ cm}$
 $AF^2 = DF^2 + 19^2 - 2(DF)(19) \cos \angle CDA$ 1M
 $AF \approx 17.0 \text{ cm}$
 在 $\triangle AEF$ 中，
 $AF^2 = AE^2 + EF^2 - 2(AE)(EF) \cos \angle AEF$
 $\angle AEF \approx 46.6^\circ$ 1A
 所求之角為 46.6° 。
3. (a) $AD = 20 \cos 50^\circ \approx 12.9 \text{ cm}$ 1A
 $DB = \sqrt{30^2 - (20 \sin 50^\circ)^2} \approx 25.8 \text{ cm}$ 1A
- (b) (i) $AB^2 = 20^2 + 30^2 - 2(20)(30) \cos 45^\circ$ 1M
 $AB \approx 21.2 \text{ cm}$ 1A
- (ii) 所求之角為 $\angle ADB$ 。
 $AB^2 = AD^2 + DB^2 - 2(AD)(DB) \cos \angle ADB$ 1M
 $\angle ADB \approx 55.1^\circ$ 1A
- (iii) $CD = 20 \sin 50^\circ \approx 15.3 \text{ cm}$
 四面體的體積 $= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} (AD)(DB) \sin \angle ADB (CD)$ 1M
 $\approx 695 \text{ cm}^3 > 650 \text{ cm}^3$
 不同意該宣稱。 1A

4. (a) $PS^2 = 24^2 + 18^2 - 2(24)(18) \cos 50^\circ$ 1M
 $PS \approx 18.6 \text{ cm}$ 1A
- (b) 設 M 為 QR 的中點。所求之角為 $\angle SMP$ 。 1M
 $SM = \sqrt{18^2 - \left(\frac{20}{2}\right)^2} = 4\sqrt{14} \text{ cm}$ 1M
 $PM = \sqrt{24^2 - 10^2} = 2\sqrt{119} \text{ cm}$
 $PS^2 = SM^2 + PM^2 - 2(SM)(PM) \cos \angle SMP$ 1M
 $\angle SMP \approx 57.0^\circ$ 1A
- (c) $\angle PAS = \cos^{-1} \frac{AP^2 + AS^2 - SP^2}{2(AP)(AS)}$
 利用圖的對稱性質，在當 A 在 QR 的中點時，使得 AP 及 AS 均垂直於 QR 且為最短，
 而此時 $\angle PAS$ 為最大。
 當 A 由 Q 移動至中點 M ， $\angle PAS$ 由 50° 增加至 57.0° 。 1A
 當 A 由中點 M 移動至 R ， $\angle PAS$ 由 57.0° 減小至 50° 。 1A

5. (a) $\angle ACB = 180^\circ - 60^\circ - 51^\circ = 69^\circ$

$$\frac{BC}{\sin 51^\circ} = \frac{20}{\sin 69^\circ} \quad 1M$$

$$BC \approx 16.6 \text{ cm} \quad 1A$$

(b) 在 $\triangle BCD$, $BD = \sqrt{23^2 + BC^2} \approx 28.4 \text{ cm}$ 。

在 $\triangle ABD$,

$$13^2 = 20^2 + BD^2 - 2(20)(BD) \cos \angle ABD \quad 1M$$

$$\angle ABD \approx 24.0^\circ \quad 1A$$

(c) 設 E 為 BC 上的一點使得 $AE \perp BC$ 。

設 F 為 BD 上的一點使得 $EF \perp BC$ 。

所求之角為 $\angle AEF$ 。

1A

在 $\triangle ABC$, $AE = 20 \sin 60^\circ = 10\sqrt{3} \text{ cm}$ 及 $BE = 20 \cos 60^\circ = 10 \text{ cm}$ 。

在 $\triangle BCD$,

$$\frac{EF}{23} = \frac{10}{BC} \quad \text{及} \quad \frac{BF}{BD} = \frac{10}{BC} \quad 1M$$

$$EF \approx 13.8 \text{ cm} \quad BF \approx 17.1 \text{ cm}$$

在 $\triangle ABD$,

$$AF^2 = 20^2 + BF^2 - 2(20)(BF) \cos \angle ABD$$

$$AF \approx 8.24 \text{ cm}$$

在 $\triangle AEF$,

$$AF^2 = AE^2 + EF^2 - 2(AE)(EF) \cos \angle AEF \quad 1M$$

$$\angle AEF \approx 27.9^\circ \quad 1A$$

(d) 設 G 為地面上的一點使得 DG 為鉛垂直線。

$$BD \sin 15^\circ = CD \sin \angle DCG \quad 1M$$

$$\angle DCG \approx 18.6^\circ$$

由 A 至水平地面的距離

$$= AE \sin(\angle AEF + \angle DCG) \quad 1M$$

$$\approx 12.7 \text{ cm} < 13 \text{ cm} \quad 1A$$

同意該宣稱。

1A