REG-EOC-2223-ASM-SET 7-MATH
建議題解

多項選擇題

1. B	2. C	3. A	4. D	5. C
6. A	7. B	8. A	9. B	10. B
11. D	12. B	13. D	14. D	15. A
16. D	17. B	18. B	19. C	20. C
21. A	22. C	23. A	24. C	

1. $\boxed{\text{B}}$

圓心的坐標為 $(1,\ 0)$。

連接 A 的半徑的斜率 $= \dfrac{0-1}{1-0}$

$= -1$

切線的斜率 $= 1$

所求方程為 $y = x + 1$。

2. $\boxed{\text{C}}$

解 $\begin{cases} x + y = 0 \\ x^2 + y^2 + 2x - 4y - 8 = 0 \end{cases}$，可得 $(x,\ y) = (1,\ -1)$ 或 $(-4,\ 4)$。

$AB = \sqrt{(1+4)^2 + (4+1)^2}$

$= 5\sqrt{2}$

3. $\boxed{\text{A}}$

I. ✓。解 $\begin{cases} x + 2y + 1 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x + 8y + 7 = 0 \end{cases}$，可得 $(x,\ y) = (3.70,\ -2.35)$ 或 $(0.703,\ -0.852)$。

L 與 C 有兩個交點。

II. ✗。該圓心的坐標為 $(1,\ -4)$。

C 的圓心在第四象限內。

III. ✗。$(1) + 2(-4) + 1 = -6 \neq 0$

L 不通過 C 的圓心。

4. $\boxed{\text{D}}$

I. ✓。解 $\begin{cases} 3x - y - 2 = 0 \\ x^2 + y^2 + 4x - 4y - 2 = 0 \end{cases}$，可得 $(x,\ y) = (1,\ 1)$。
它是該圓的切線。

II. ✗。解 $\begin{cases} 2x - y - 2 = 0 \\ x^2 + y^2 + 4x - 4y - 2 = 0 \end{cases}$，沒有實數解。
它與該圓不相交。

III. ✓。解 $\begin{cases} x - 3y - 2 = 0 \\ x^2 + y^2 + 4x - 4y - 2 = 0 \end{cases}$，可得 $(x,\ y) = (-1,\ -1)$。
它是該圓的切線。

5. $\boxed{\text{C}}$

$$x^2 + k^2 - 2x - 2k + 1 = 0$$
$$x^2 - 2x + (k^2 - 2k + 1) = 0$$
$$\Delta = 2^2 - 4(1)(k^2 - 2k + 1) = 0$$
$$-4k^2 + 8k = 0$$
$$k = 0 \quad \text{或} \quad 2$$

6. $\boxed{\text{A}}$

利用選項中的 c 的值解方程組 $\begin{cases} 2x - y + c = 0 \\ x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0 \end{cases}$。

A. 可得 $(x,\ y) = (0,\ 2)$。
當 $c = 2$ 時，L 為圓 S 的切線。

B. 沒有交點。

C. 沒有交點。

D. 沒有交點。

7. $\boxed{\text{B}}$

利用計算機程式解方程組 $\begin{cases} 2x - y + k = 0 \\ x^2 + y^2 - 8x - 10y - 39 = 0 \end{cases}$。

A. ✗。2 相異交點。

B. ✓。1 個交點：$(4,\ 9)$。

C. ✗。2 相異交點。

D. ✗。2 相異交點。

8. $\boxed{\text{A}}$

利用計算機程式解方程組 $\begin{cases} mx - y = 0 \\ x^2 + y^2 - 6x + 4 = 0 \end{cases}$ 。

A. 1 個交點 → 切線

B. 沒有交點

C. 沒有交點

D. 沒有交點

9. $\boxed{\text{B}}$

利用計算機程式解方程組 $\begin{cases} 4x - 3y = 0 \\ x^2 + y^2 - 3kx + ky + 1 = 0 \end{cases}$ 。

I. ✓。1 個交點：$\left(-\dfrac{3}{5}, -\dfrac{4}{5}\right)$。

II. ✓。1 個交點：$\left(\dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5}\right)$。

III. ✗。2 個交點。

10. $\boxed{\text{B}}$

利用計算機程式解方程組 $\begin{cases} x + y + 4 = 0 \\ x^2 + y^2 + 2x - 6y + k = 0 \end{cases}$ 。

A. ✗。2 個交點：$(-2, -2)$ 及 $(-6, 2)$。

B. ✓。

C. ✗。沒有交點。

D. ✗。沒有交點。

11. $\boxed{\text{D}}$

利用計算機程式解方程組 $\begin{cases} mx - y - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 - 16x - 2y + 31 = 0 \end{cases}$ 。

當 $m = \dfrac{5}{3}$ 及當 $m = -\dfrac{3}{5}$ 時，方程組有重根。

因此，$m = \dfrac{5}{3}$ 或 $-\dfrac{3}{5}$。

12. $\boxed{\text{B}}$

C 與 x 軸相交於兩點 ⇒ 當 $y = 0$ 時，x 有兩相異實數值。

利用計算機 FMLA 01，只有選項 A 及 B 滿足以上條件。

L 的方程為 $y = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}x \rightarrow \sqrt{3}x + 3y = 0$。利用計算機程式計算交點：

A. 相異坐標 → ✗

B. 相同坐標 → ✓

13. $\boxed{\text{D}}$

利用計算機程式解方程組 $\begin{cases} x - y + 9 = 0 \\ x^2 + y^2 - 6x + cy - 7 = 0 \end{cases}$ 。

c 的值	交點數目	Δ
-56	2	+

所求範圍包含 -56，且 -56 不是所求範圍的界線值。
答案為 D。

14. $\boxed{\text{D}}$

利用計算機程式解方程組 $\begin{cases} x - y + k = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0 \end{cases}$ 。

k 的值	交點數目	Δ
-7	1	0
0	2	+

所求範圍有 -7 作為界線值，且不包含 0。
答案為 D。

15. $\boxed{\text{A}}$

$$x^2 + (x-1)^2 - 2x + 4(x-1) + k = 0$$
$$2x^2 + (-2 - 2 + 4)x + (1 - 4 + k) = 0$$
$$2x^2 + (k-3) = 0$$
$$\Delta = 0^2 - 4(2)(k-3) \geq 0$$
$$24 - 8k \geq 0$$
$$k \leq 3$$

k 的最大值為 3。

16. $\boxed{\text{D}}$

利用計算機程式解方程組 $\begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ x^2 + y^2 - 6x + k = 0 \end{cases}$ 。

k 的值	交點數目	Δ
0	2	+

所求範圍不包含 $k = 0$，且 0 不是所求範圍的界線值。
答案為 D。

17. $\boxed{\text{B}}$

利用計算機程式解方程組 $\begin{cases} 3x - 4y + k = 0 \\ x^2 + y^2 + 2x - 2y - 7 = 0 \end{cases}$。

k 的值	交點數目	Δ
−8	1	0

所求範圍有 −8 作為界線值（可等於）。
答案為 B。

18. $\boxed{\text{B}}$

利用計算機程式解方程組 $\begin{cases} x - y + k = 0 \\ x^2 + y^2 + 2x - 4y - 13 = 0 \end{cases}$。

k 的值	交點數目	Δ
−9	0	−

所求範圍不包含 −9，且 −9 不是所求範圍的界線值。
答案為 B。

19. $\boxed{\text{C}}$

當直線通過圓心 $(-1, 2)$ 時，$k = -1 - 2 = -3$。
AB 的中點即為圓心。
當 $k = -3$ 時，中點的 x 坐標 $= -1$。
只有 C 符合上述條件。

20. $\boxed{\text{C}}$

利用計算機程式解方程組 $\begin{cases} 2x - y - 6 = 0 \\ x^2 + y^2 - 8y - 14 = 0 \end{cases}$。
坐標在計算機內被儲存為 $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ 及 $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$。
中點的 y 坐標 $= \dfrac{\mathbf{B} + \mathbf{Y}}{2} = 2$

21. $\boxed{\text{A}}$

利用計算機程式解方程組 $\begin{cases} 3x - y - 2 = 0 \\ x^2 + y^2 + \frac{k}{5}x + \frac{4}{5} - 4 = 0 \end{cases}$。

坐標在計算機內被儲存為 (**A**, **B**) 及 (**X**, **Y**)。

中點的 x 坐標 $= \dfrac{\mathbf{A} + \mathbf{X}}{2}$

k 的值	交點數目	$\dfrac{\mathbf{A} + \mathbf{X}}{2}$
−152	2	2
−52	2	1
148	2	−1
248	2	−2

答案為 A。

22. $\boxed{\text{C}}$

當直線通過圓心 (−1, 2) 時，$k = -1 - 2 = -3$。

AB 的中點即為圓心。

當 $k = -3$ 時，中點的 y 坐標 = 2。

只有選項 C 符合上述條件。

23. $\boxed{\text{A}}$

設 L 的方程為 $y = mx$ 使得 L 通過原點。

$$x^2 + (mx)^2 - x + 5(mx) + 2 = 0$$
$$(1 + m^2)x^2 + (5m - 1)x + 2 = 0$$

$$\Delta = (5m - 1)^2 - 4(1 + m^2)(2) = 0$$
$$17m^2 - 10m - 7 = 0$$
$$m = 1 \quad 或 \quad -\frac{7}{17}$$

可得 $m = 1$。

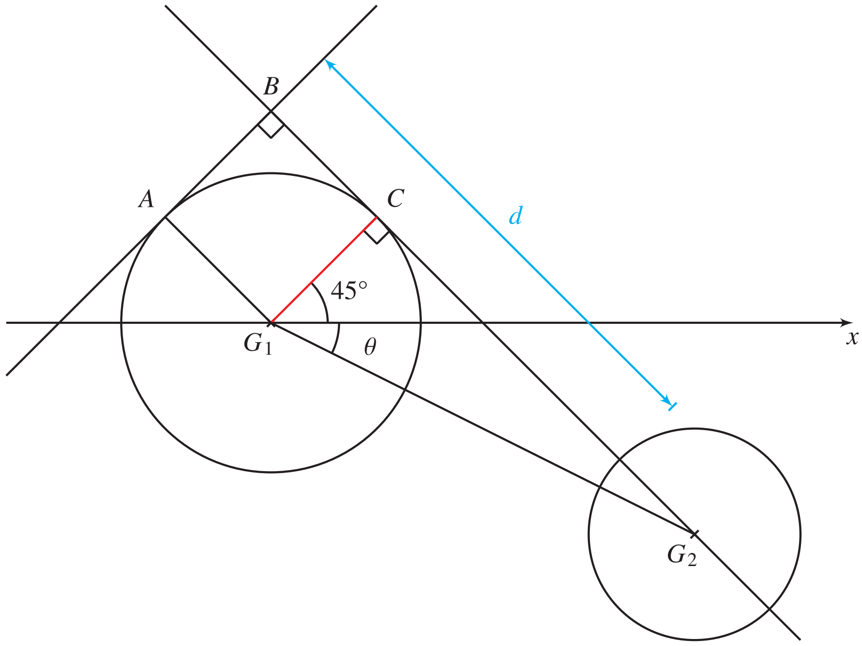
$$(1 + 1^2)x^2 + (5 - 1)x + 2 = 0$$
$$2x^2 + 4x + 2 = 0$$
$$x = -1$$

當 $x = -1$，$y = (1)(-1) = -1$。

P 的坐標為 (−1, −1)。

24. $\boxed{\text{C}}$

設 G_1 及 G_2 分別為 C_1 及 C_2 的圓心。



假定 L 與 C_1 相切於 A，B 為 L 上的點使得 $BG_2 \perp L$。

設 C 為 BG_2 上的點使得 $AB // CG_1$。

留意 C 不需在 C_1 上。

由於 L 的斜率為 1，CG_1 的傾角 = 45°。

$G_1G_2 = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}$

G_1G_2 的斜率 $= -\tan\theta = \dfrac{-2}{4}$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{1}{2}$$

在 $\triangle CG_1G_2$ 中，$G_1G_2 = \sqrt{20}$ 及 $CG_2 = G_1G_2 \sin(45° + \theta) = \sqrt{18}$。

所求距離 $= BG_2 - 1$

$$\begin{aligned} &= (AG_1 + CG_2) - 1 \\ &= (\sqrt{2} + 3\sqrt{2}) - 1 \\ &= 4\sqrt{2} - 1 \end{aligned}$$

結構式試題

25. (a) $\angle ABC = \angle AOC$

$\angle ADC = 2\angle ABC = 2\angle AOC$ 1M

$\angle OCD = \angle OAD = 90^\circ$ 1M

在四邊形 $OACD$ 中，

$\angle AOC + 2 \times 90^\circ + \angle ADC = 360^\circ$ 1M

$3\angle AOC = 180^\circ$

$\angle AOC = 60^\circ$ 1A

(b) (i) $\angle AOD = \dfrac{1}{2}\angle AOC = 30^\circ$ 1M

在 $\triangle AOD$ 中，

$$\sin 30^\circ = \frac{AD}{OD} = \frac{BD}{OD}$$

$OD = 2BD$ 1M

故此，D 的坐標為 $\left(\dfrac{0+2\times 9}{3},\ \dfrac{0+2\times 9}{3}\right) = (6,\ 6)$。 1A

所求方程為

$(x-6)^2 + (y-6)^2 = (9-6)^2 + (9-6)^2$

$(x-6)^2 + (y-6)^2 = 18$ 1A

(ii) 設 $y = mx$ 為從 O 的切線的方程。

$(x-6)^2 + (mx-6)^2 = 18$ 1M

$(m^2+1)x^2 - 12(m+1)x + 54 = 0$

由於 $y = mx$ 為切線，

$\Delta = [-12(m+1)]^2 - 4(m^2+1)(54) = 0$ 1M

$-72m^2 + 288m - 72 = 0$ 1A

$$m = \frac{4 \pm \sqrt{4^2-4}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$$

OA 及 OC 的方程分別為 $y = (2-\sqrt{3})x$ 及 $y = (2+\sqrt{3})x$。 1A+1A

26. (a) (i) $\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{x+2}{x^2-1} = \dfrac{x+1-(x+2)}{x^2-1}$

$= \dfrac{-1}{x^2-1}$ 1A

因此，$A = 0$ 及 $B = -1$。 1A

(ii) $f(x) = -4x^2 - 16x - 19$

$= -4[x^2 + 2(2)(x) + 2^2] - 3$ 1M

$= -4(x+2)^2 - 3$ 1A

$f(x)$ 的極大值為 -3。 1A

(b) $x^2 + [(k+2)x]^2 + \dfrac{1}{k-1}x - \dfrac{1}{k^2-1}(k+2)x + \dfrac{1}{(k^2-1)^2} = 0$ 1M

$(k^2+4k+5)x^2 + \left(\dfrac{1}{k-1} - \dfrac{k+2}{k^2-1}\right)x + \dfrac{1}{(k^2-1)^2} = 0$

$(k^2+4k+5)x^2 - \dfrac{1}{k^2-1}x + \dfrac{1}{(k^2-1)^2} = 0$ 1A

$\Delta = \left(\dfrac{1}{k^2-1}\right)^2 - 4(k^2+4k+5)\left(\dfrac{1}{(k^2-1)^2}\right)$ 1M

$= \dfrac{1}{(k^2-1)^2}(-4k^2 - 16k - 19)$

$= \dfrac{1}{(k^2-1)^2}[-4(k+2)^2 - 3]$ 1M

$\leq -3\left(\dfrac{1}{(k^2-1)^2}\right) < 0$

C 與 L 不相交。

同意該宣稱。 1A

27. (a) $CE \perp AB$ *（垂心性質）*

$BD \perp AC$ *（垂心性質）*

$\angle BEC = \angle BDC = 90°$

因此，$BCDE$ 為圓內接四邊形。 *（同弓形內的圓周角的逆定理）*

評分標準		
情況 1	附有正確理由的任何正確證明。	2
情況 2	未附有正確理由的任何正確證明。	1

(b) (i) 圓心的坐標 $= \left(\dfrac{-6+14}{2}, \dfrac{-6-6}{2}\right) = (4, -6)$ 1A

圓的方程為

$(x-4)^2 + (y+6)^2 = (0-4)^2 + (8+6)^2$ 1M

$(x-4)^2 + (y+6)^2 = 100$ 1A

(ii) A 與圓心的距離 $= \sqrt{4^2 + (-6-8)^2} = \sqrt{212}$

圓的半徑 $= 10$

兩切線之間的角 $= 2 \times \sin^{-1}\dfrac{10}{\sqrt{212}} \approx 86.8° \neq 90°$ 1M+1A

不同意該宣稱。 1A

28. (a) $G\,(6,\ 4)$ 及 $GH = \sqrt{(6-3)^2 + (4-0)^2} = 5$

Γ 的半徑 $= 5 - 4 = 1$ 1M

Γ 的方程為 $(x-3)^2 + y^2 = 1$。 1A

(b) (i) 留意 G、H、B 共線，且 $GH : HB = (4-1) : 1 = 3 : 1$。 1M

設 B 的坐標為 $(a,\ b)$。

$$\frac{3-a}{6-3} = \frac{1}{3} \quad 及 \quad \frac{0-b}{4-0} = \frac{1}{3}$$ 1M

$$a = 2 \qquad\qquad b = -\frac{4}{3}$$

B 的坐標為 $\left(2,\ -\frac{4}{3}\right)$。 1A

(ii) $\angle GA_1B = 90°$ *（切線 ⊥ 半徑）*

$\angle GA_2B = 90°$ *（切線 ⊥ 半徑）*

$\angle GA_1B + \angle GA_2B = 90° + 90°$

$= 180°$

因此，G、A_1、B、A_2 共圓。 *（對角互補）*

評分標準		
情況 1	附有正確理由的任何正確證明。	2
情況 2	未附有正確理由的任何正確證明。	1

(iii) $\left(4,\ \frac{4}{3}\right)$ 1A

29. (a) $\sqrt{(h-6)^2+(9-3)^2}=\sqrt{(h-a)^2+(11-3)^2}$ 1M

$$h^2-12h+72=h^2+a^2-2ah+64$$

$$h=\frac{a^2-8}{2a-12}$$

G 的坐標為 $\left(\dfrac{a^2-8}{2a-12},\ 3\right)$。 1A

(b) (i) $\dfrac{11-3}{a-\frac{a^2-8}{2a-12}}=\dfrac{4}{3}$ 1M

$$24(2a-12)=4[a(2a-12)-(a^2-8)]$$

$$0=4a^2-96a+320$$

$$a=4 \quad 或 \quad 20$$

當 $a=4$ 時，$h=-2<0$；當 $a=20$ 時，$h=14>0$。

故此，$a=20$。 1A

(ii) G 的坐標為 $(14,\ 3)$。C 的方程為

$$(x-14)^2+(y-3)^2=(6-14)^2+(9-3)^2$$ 1M

$$x^2+y^2-28x-6y+105=0$$

$$x^2+(kx)^2-28x-6kx+105=0$$ 1M

$$(1+k^2)x^2+(-28-6k)x+105=0$$

M 的 x 坐標 $=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{28+6k}{1+k^2}$

$=\dfrac{14+3k}{1+k^2}$ 1

(iii) 由於 $\angle OMG = 90°$，$OM = 2\sqrt{41}$。

$$\sqrt{\left(\frac{14+3k}{1+k^2}\right)^2 + \left(\frac{k(14+3k)}{1+k^2}\right)^2} = 2\sqrt{41}$$ 1M

$$\frac{(14+3k)^2}{1+k^2} = 164$$

$$-155k^2 + 84k + 32 = 0$$

$$k = \frac{4}{5} \quad 或 \quad -\frac{8}{31}（捨去）$$

M 的坐標為 $(10,\ 8)$。 1M

M、G、A 共線。

B 的坐標為 $(4,\ 3)$。 1M

當圓 AUB 的面積為最小時，$\angle AUB = 90°$。 1M

$$AM\ 的斜率 \times BM\ 的斜率 = \frac{8-3}{10-14} \times \frac{8-3}{10-4}$$ 1M

$$= -\frac{25}{24} \neq -1$$

故此，$\angle AMB \neq 90°$ 及 $\angle AUB + \angle AMB \neq 180°$。

A、M、B、U 不共圓。 1A