REG-EOC-2223-ASM-SET 4-MATH
建議題解

多項選擇題

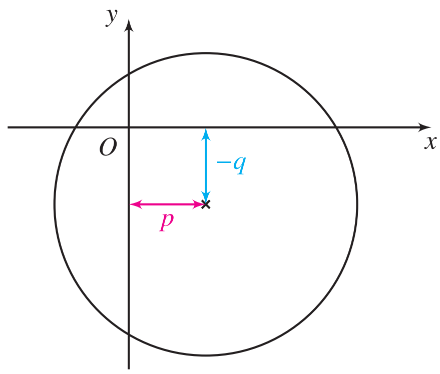
1. $\boxed{\text{D}}$

圓心 (p, q) 在第四象限。故此，$p > 0$ 及 $q < 0$。

I. ✓。

II. ✓。$p - r < 0$
（長度 p 較半徑短）

III. ✓。$\sqrt{p^2 + q^2} < r$
（原點與圓心的距離小於半徑）



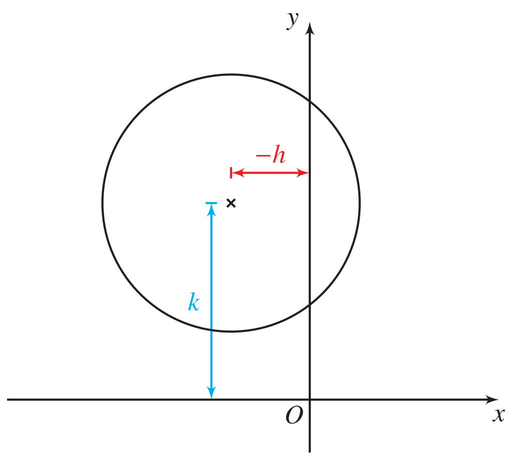
2. $\boxed{\text{A}}$

圓心在第二象限內。所以，$h < 0$ 及 $k > 0$。

I. ✓。$k + h = k - (-h) > 0$
（與 x 軸的距離大於與 y 軸的距離）

II. ✓。$r - h = r + (-h) > 0$
（長度為正數）

III. ✗。$r - k < 0$
（半徑小於與 x 軸的距離）



3. $\boxed{\text{D}}$

I. 半徑 $= \sqrt{3^2 + 4^2 - 10} = \sqrt{15}$

II. 半徑 $= \sqrt{4^2 + 3^2 - 10} = \sqrt{15}$

III. 半徑 $= \sqrt{5^2 - 10} = \sqrt{15}$

所有的圓均有相同面積。
答案為 D。

4. $\boxed{\text{D}}$

$C：x^2 + y^2 + 3x + 4y - \dfrac{25}{2} = 0$

圓心 $\left(-\dfrac{3}{2},\ -2\right)$

半徑 $= \sqrt{\left(\dfrac{3}{2}\right)^2 + 2^2 + \dfrac{25}{2}} = \dfrac{5\sqrt{3}}{2}$

5. $\boxed{\text{C}}$

圓心 $\left(-\dfrac{k}{2},\ -\dfrac{k+1}{2}\right)$

$$-\frac{k}{2} - \frac{k+1}{2} + 1 = 0$$

$$k = \frac{1}{2}$$

6. $\boxed{\text{A}}$

L 通過圓心 $\left(\dfrac{k}{-2},\ -2\right)$。

$$\frac{3-(-2)}{16-\frac{k}{-2}} = \frac{1}{2}$$

$$k = -12$$

7. $\boxed{\text{D}}$

直徑通過圓心 $(4,\ 3)$。

$$\frac{-5-3}{k-4} = -4$$

$$k = 6$$

8. $\boxed{\text{A}}$

設 S 的圓心為 G。G 的坐標為 $(1,\ 2)$。留意 $GM \perp AB$。

GM 的斜率 $= \dfrac{2+2}{1-3} = -2$

AB 的斜率 $= \dfrac{1}{2}$

所求方程為

$$y + 2 = \frac{1}{2}(x-3)$$

$$x - 2y - 7 = 0$$

9. $\boxed{\text{B}}$

半徑 $= \sqrt{1^2 + 2^2 + 4} = 3$

所求面積 $= 4 \times \dfrac{(3)(3)}{2}$

$= 18$

10. $\boxed{\text{C}}$

圓心距離 $= \sqrt{(3+3)^2 + (7+1)^2}$

$= 10$

$= 8 + 2$

兩圓外切。

11. $\boxed{\text{D}}$

將該點的坐標代入方程的左式。

A. $10^2 + 6^2 - 8(10) + 4(6) - 16 = 64 > 0$。$W$ 在圓外。

B. $8^2 + 8^2 - 8(8) + 4(8) - 16 = 80 > 0$。$X$ 在圓外。

C. $6^2 + 6^2 - 8(6) + 4(6) - 16 = 32 > 0$。$Y$ 在圓外。

D. $9^2 + 0 - 8(9) - 16 = -7 < 0$。$Z$ 在圓內。

12. $\boxed{\text{C}}$

I. ✓。圓心的坐標為 $(-1,\ 0)$。
圓心在 x 軸上。

II. ✓。半徑 $= \sqrt{9} = 3$

III. ✗。當 $y = 0$，

$$(x+1)^2 + 0 = 9$$

$$x = 2 \quad \text{或} \quad -4$$

該圓與 x 軸相交於 $(2,\ 0)$ 及 $(-4,\ 0)$。

13. $\boxed{\text{C}}$

C_2：$x^2 + y^2 + 6x - 8y + \frac{25}{2} = 0$

I. ✓。$G_1\ (8,\ -6)$、$G_2\ (-3,\ 4)$。$OG_1 = 10 = 2OG_2$

II. ✗。$m_{OG_1} \times m_{OG_2} = \frac{-6}{8} \times \frac{4}{-3} \neq -1$

III. ✓。C_1 的半徑 $= \sqrt{8^2 + 6^2 - 75} = 5$，$C_2$ 的半徑 $= \sqrt{3^2 + 4^2 - \frac{25}{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}}$

C_1 的面積與 C_2 的面積之比為 $5 : \left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2 = 2 : 1$。

14. $\boxed{\text{C}}$

C_1：$x^2 + y^2 + 2x + 4y - \dfrac{149}{2} = 0$。

I. ✓。$(-1)^2 + (2)^2 - 8(-1) - 20(2) - 53 = 0$。它在 C_2 上。

II. ✗。C_1 的半徑 $= \sqrt{1^2 + 2^2 + \dfrac{149}{2}} = \sqrt{79.5}$ 而 C_2 的半徑 $= \sqrt{4^2 + 10^2 + 53} = 13$。

III. ✓。兩圓心的距離 $= 13$，在兩半徑的和與差之間，即在 $13 - \sqrt{79.5}$ 與 $13 + \sqrt{79.5}$ 之間。
所以，它們相交於兩相異點。

15. $\boxed{\text{D}}$

C：$x^2 + y^2 - 3x + y - \dfrac{13}{2} = 0$

I. ✗。圓心 $\left(\dfrac{3}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$

II. ✓。$AB = \sqrt{(2-1)^2 + (1+2)^2} = \sqrt{10}$
半徑 $= \sqrt{\left(\dfrac{3}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{13}{2}} = 3 < AB$

III. ✓。AB 的斜率 $= \dfrac{1+2}{2-1} = 3$
AG 的斜率 $= \dfrac{-2 + \frac{1}{2}}{1 - \frac{3}{2}} = 3$，其中 G 為圓心
因此，三點共線。

16. $\boxed{\text{B}}$

I. ✓。半徑 $= \sqrt{3^2 + 6^2 + 4} = 7$

II. ✗。圓心 $(3, -6)$ 在第四象限。

III. ✓。$0^2 + 0^2 - 6(0) + 12(0) - 4 = -4 < 0$
原點在圓內。

17. $\boxed{\text{D}}$

I. ✓。$G_1\ (-2, 6)$，$G_2\ (2, 4)$。OG_2 的斜率 $\times$ G_1G_2 的斜率 $= \dfrac{4}{2} \times \dfrac{6-4}{-2-2} = -1$

II. ✓。圓心的距離 $= \sqrt{(2+2)^2 + (6-4)^2} = \sqrt{20}$
C_1 的半徑 $= \sqrt{2^2 + 6^2 + 40} = \sqrt{80} = 2\sqrt{20}$；$C_2$ 的半徑 $= \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20}$
由於圓心的距離 = 半徑之差，該兩圓內切。

III. ✓。面積比 $= \left(\dfrac{\sqrt{80}}{\sqrt{20}}\right)^2 = 4$

18. $\boxed{\text{A}}$

$x^2 + y^2 - x - \frac{y}{2} + \frac{1}{4} = 0$

I. ✗。圓心 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$

II. ✗。半徑 $= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \neq 2$

III. ✓。半徑 $= \frac{1}{4}$ = 圓心的 y 坐標。
故此，該圓與 x 軸相切。

19. $\boxed{\text{C}}$

C_2 ：$x^2 + y^2 + 6x - 8y + \frac{33}{2} = 0$
$G_1\ (4, 3)$ 及 $G_2\ (-3, 4)$。

I. ✓。G_1O 的斜率 $\times G_2O$ 的斜率 $= \frac{3}{4} \times \frac{4}{-3} = -1$

II. ✗。C_1 的半徑 $= \sqrt{4^2 + 3^2 - 20} = \sqrt{5}$ 及 C_2 的半徑 $= \sqrt{3^2 + 4^2 \frac{33}{2}} = \sqrt{8.5} > \sqrt{5}$
故此，C_1 的面積小於 C_2 的面積。

III. ✓。$OG_1 = OG_2 = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

20. $\boxed{\text{A}}$

$x^2 + y^2 - 9x + 8y - \frac{1}{2} = 0$

I. ✓。$0 + y^2 - 0 + 8y - \frac{1}{2} = 0$

$y \approx 0.0620$ 或 -8.06

圓與 y 軸有兩個交點。

II. ✗。圓心的坐標為 $\left(\frac{9}{2}, -4\right)$。

III. ✗。代 $(0, 0)$，左式 $= -\frac{1}{2} < 0$。圓心在圓內。

21. $\boxed{\text{C}}$

I. ✗。C_1 及 C_2 的圓心的坐標分別為 $(-4, 3)$ 及 $(4, -3)$。
它們不是同心圓。

II. ✓。兩圓的半徑 $= \sqrt{4^3 + 3^2 + 25} = \sqrt{50}$
直徑長度相等。

III. ✓。圓心與 y 軸的距離均為 4，小於半徑。
C_1 及 C_2 均與 y 軸有兩相異交點。

22. $\boxed{\text{A}}$

I. ✓。C_1 的半徑 $= \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$；C_2 的半徑 $= \sqrt{25} = 5$

II. ✓。圓心的距離 $= \sqrt{(3-0)^2 + (0+4)^2} = 5$

III. ✗。$(0,\ 0)$ 不滿足 C_2 的方程。C_2 不通過原點。

23. $\boxed{\text{D}}$

I. ✓。$(0,\ 0)$ 滿足該方程。

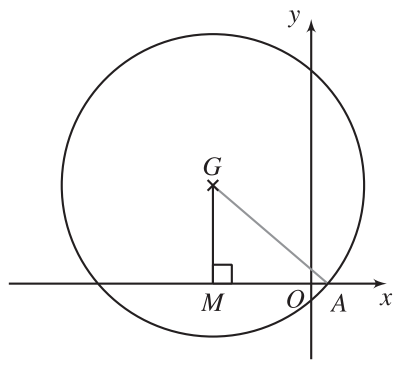
II. ✗。圓心的坐標為 $(0,\ -4)$。
它不在 x 軸上。

III. ✓。半徑 $= \sqrt{0^2 + 4^2 - 0} = 4$
圓心與 x 軸的距離等於半徑。
C 與 x 軸相切。

24. $\boxed{\text{C}}$

將圓心記為 G。

設 M 為 x 軸上的一點使得 GM 垂直於 x 軸。
設 A 為該圓與正 x 軸的交點。
M 的坐標為 $(-3,\ 0)$。
$AM = \dfrac{8}{2} = 4$ 及 A 的坐標為 $(1,\ 0)$。
圓的半徑 $= \sqrt{(1+3)^2 + (0-3)^2} = 5$
所求方程為 $(x+3)^2 + (y-3)^2 = 25$。



結構式試題

25. (a) $(x-6)^2+(y+5)^2=6^2+5^2$	1M
$(x-6)^2+(y+5)^2=61$	1A
(b) (i) $H=(12,\ 0)$ 及 $K=(0,\ -10)$	1A+1A
(ii) O、P、Q 共線。	1A
(iii) 所求面積 $=12\times 10$	1M
$=120$	1A

26. (a) 由於 $FB=FE$，$\angle FBE=\angle FEB$。	
$\angle FCA=\dfrac{1}{2}\angle FEA$	1M
在 $\triangle ABC$ 中，	
$\angle ABC+\angle BCA=\angle CAE$	
$\angle ABC+\dfrac{1}{2}\angle ABC=\theta$	1M
$\angle ABC=\dfrac{2\theta}{3}$	1A
(b) (i) $\angle ABC=\dfrac{2}{3}(45°)=30°$	1M
$BE=\dfrac{CE}{\tan 30°}=\sqrt{3}CE$ 及 $AE=\dfrac{CE}{\tan 45°}=CE$	
$AB=BE-AE$	
$0-(1-\sqrt{3})=CE(\sqrt{3}-1)$	1M
$CE=1$	1A
C 的坐標 $=(0+1,\ 0+1)=(1,\ 1)$	1A
D 的坐標 $=(0+1+1,\ 0)=(2,\ 0)$	1A
(ii) 圓 $ADCF$ 的方程為 $(x-1)^2+y^2=1$	1A

27. (a) $y^2 - 12y + 32 = 0$

$y = 4$ 或 8

A 的坐標為 $(0, 4)$。 1A

(b) $c = 4$ 1A

P 的坐標為 $(6, 6)$。 1M

AP 的斜率 $= \dfrac{6-4}{6-0} = \dfrac{1}{3}$

L 的斜率 $= m = -3$ 1A

(c) 設 B 的 x 坐標為 b。

由於 B 在 $y = -3x + 4$ 上，B 的坐標為 $(b, -3b + 4)$。

$\sqrt{b^2 + (-3b + 4 - 4)^2} = \sqrt{(0-6)^2 + (4-6)^2}$ 1M

$b^2 + 9b^2 = 40$

$b = 2$ 或 -2（捨去）

B 的坐標為 $(2, -2)$。 1A

C_2 的方程為

$(x + 10)^2 + (y + 6)^2 = (2 + 10)^2 + (-2 + 6)^2$ 1M

$(x + 10)^2 + (y + 6)^2 = 160$ 1A

28. (a) $OQ = OP = r$ 1A

$AP = AQ = 4 - r$ 及 $BP = BR = 3 - r$ 1M+1A

(b) $(3 - r) + (4 - r) = \sqrt{3^2 + 4^2}$ 1M

$r = 1$

C 的坐標為 $(1, 1)$。 1A

(c) 圓的方程為

$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1^2$

$x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ 1A

29. (a) 設圓的方程為 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$，其中 D、E 及 F 均為常數。 1A

$$\begin{cases} 1 + 4 + D + 2E + F = 0 & (1) \\ 9 + 3E + F = 0 & (2) \\ 16 + 4D + F = 0 & (3) \end{cases}$$ 1M

考慮 (2) − (1) 及 (3) − (2)。

$$\begin{cases} -D + E = -4 \\ 4D - 3E = -7 \end{cases}$$ 1M

求解後，$D = -19$ 及 $E = -23$。 1A

當 $D = -19$ 及 $E = -23$ 時，$F = -9 - 3(-23) = 60$。

圓的方程為 $x^2 + y^2 - 19x - 23y + 60 = 0$。 1A

(b) 圓心 $= \left(\frac{19}{2}, \frac{23}{2}\right)$ 1A

圓的半徑 $= \sqrt{\left(\frac{19}{2}\right)^2 + \left(\frac{23}{2}\right)^2 - 60} = \frac{5\sqrt{26}}{2}$ 1A

(c) 若圓上的兩點能成直徑，它們的中點必需為圓心。

AB 的中點 $= \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$ 1M

BC 的中點 $= \left(2, \frac{3}{2}\right)$

CA 的中點 $= \left(\frac{5}{2}, 1\right)$

以上皆不是圓的圓心。

因此，該宣稱不正確。 1A

– 試卷完 –