

M2REG-SPVP-2223-ASM-SET 3-MATH

建議題解

$$\begin{aligned}
 1. \text{ 所求向量} &= \left[\frac{(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} \right] \mathbf{a} \\
 &= \frac{(5\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}) \cdot (3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k})}{3^2 + 2^2 + 1^2} (3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}) \\
 &= \frac{15}{7}\mathbf{i} - \frac{10}{7}\mathbf{j} + \frac{5}{7}\mathbf{k}
 \end{aligned}$$

1M
1A

$$\begin{aligned}
 2. \text{ 所求向量} &= \frac{(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - 2\mathbf{b})}{(\mathbf{a} - 2\mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - 2\mathbf{b})} (\mathbf{a} - 2\mathbf{b}) \\
 &= \frac{(-3\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - \mathbf{k}) \cdot (3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 10\mathbf{k})}{3^2 + 1^2 + 10^2} (3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 10\mathbf{k}) \\
 &= \frac{12}{55}\mathbf{i} + \frac{4}{55}\mathbf{j} - \frac{8}{11}\mathbf{k}
 \end{aligned}$$

1M
1A

$$\begin{aligned}
 3. \text{ 投影向量} &= \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} (\mathbf{v}) \\
 &= \frac{[3\mathbf{i} + \lambda\mathbf{j} + (\lambda + 1)\mathbf{k}] \cdot (3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k})}{3^2 + 2^2 + 1^2} (3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}) \\
 &= \frac{3\lambda + 24}{14}\mathbf{i} + \frac{\lambda + 8}{7}\mathbf{j} - \frac{\lambda + 8}{14}\mathbf{k}
 \end{aligned}$$

1M

可得 $\frac{3\lambda + 24}{14} = \mu$ 、 $\frac{\lambda + 8}{7} = \mu - \frac{1}{2}$ 及 $\beta = -\frac{\lambda + 8}{14}$ 。

1M

求解後，可得 $\lambda = -1$ 、 $\mu = \frac{3}{2}$ 及 $\beta = -\frac{1}{2}$ 。

3A

$$\begin{aligned}
 4. \text{ 投影向量} &= \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} (\mathbf{v}) \\
 &= \frac{[(2\lambda - 1)\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 5\mathbf{k}] \cdot (2\mathbf{i} - \lambda\mathbf{j} - \mathbf{k})}{2^2 + \lambda^2 + 1^2} (2\mathbf{i} - \lambda\mathbf{j} - \mathbf{k}) \\
 &= \frac{2\lambda + 6}{\lambda^2 + 5}\mathbf{i} - \frac{\lambda^2 + 3\lambda}{\lambda^2 + 5}\mathbf{j} - \frac{\lambda + 3}{\lambda^2 + 5}\mathbf{k}
 \end{aligned}$$

1M

可得 $\frac{2\lambda + 6}{\lambda^2 + 5} = \frac{4}{3}$ 、 $-\frac{\lambda + 3}{\lambda^2 + 5} = -\frac{2}{3}$ 及 $-\frac{\lambda^2 + 3\lambda}{\lambda^2 + 5} = \mu$ 。

1M

$$\begin{aligned}
 \frac{2\lambda + 6}{\lambda^2 + 5} &= \frac{4}{3} & \text{及} & & -\frac{\lambda + 3}{\lambda^2 + 5} &= -\frac{2}{3} \\
 6\lambda + 18 &= 4\lambda^2 + 20 & & & 3\lambda + 9 &= 2\lambda^2 + 10 \\
 4\lambda^2 - 6\lambda + 2 &= 0 & & & 2\lambda^2 - 3\lambda + 1 &= 0 \\
 \lambda &= 1 \text{ 或 } \frac{1}{2} & & & \lambda &= 1 \text{ 或 } \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

當 $\lambda = 1$ ， $\mu = -\frac{2}{3}$ ；當 $\lambda = \frac{1}{2}$ ， $\mu = -\frac{1}{3}$ 。

因此， $(\lambda, \mu) = \left(1, -\frac{2}{3}\right)$ 或 $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right)$ 。

1A+1A

5. (a) $\overrightarrow{AB} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$

$\overrightarrow{AC} = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

所求向量 $= \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{(\overrightarrow{AC})^2} (\overrightarrow{AC})$

$$= \frac{(\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}) \cdot (2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k})}{2^2 + 2^2 + 2^2} (2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}) \quad 1M$$

$$= \frac{1}{3}\mathbf{i} - \frac{1}{3}\mathbf{j} - \frac{1}{3}\mathbf{k} \quad 1A$$

(b) 設 N 為 B 在 AC 上的投影。

$\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AB}$

$$= -\frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} - \frac{4}{3}\mathbf{k} \quad 1A$$

所求距離 $= BN$

$$= \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2}$$

$$= \frac{2\sqrt{6}}{3} \quad 1A$$

6. (a) $\overrightarrow{OA} = -\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

$\overrightarrow{OB} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{(\overrightarrow{OB})^2} (\overrightarrow{OB})$

$$= \frac{(-\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) \cdot (\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k})}{1^2 + 2^2 + 2^2} (\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) \quad 1M$$

$$= -\frac{1}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k} \quad 1A$$

(b) $OM = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2}$

$$= 1 \quad 1A$$

$\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\mathbf{i} - \frac{10}{3}\mathbf{j} - \frac{11}{3}\mathbf{k}$

$AM = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{10}{3}\right)^2 + \left(\frac{11}{3}\right)^2}$

$$= 5$$

所求面積 $= \frac{1}{2}(OM)(AM)$

$$= \frac{5}{2}$$

1A

7. (a) $\overrightarrow{AB} = -3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

$\overrightarrow{AC} = \mathbf{i} - 5\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3 & -2 & -2 \\ 1 & -5 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= -2\mathbf{i} - 14\mathbf{j} + 17\mathbf{k}$$

1A

所求面積 = $\frac{1}{2}\sqrt{2^2 + 14^2 + 17^2}$

$$= \frac{\sqrt{489}}{2}$$

1A

(b) $\overrightarrow{AD} = \mathbf{i} + \mathbf{k}$

所求長度 = $\frac{|(\mathbf{i} + \mathbf{k}) \cdot (-2\mathbf{i} - 14\mathbf{j} + 17\mathbf{k})|}{\sqrt{2^2 + 14^2 + 17^2}}$

1M

$$= \frac{5\sqrt{489}}{163}$$

1A

(c) 所求體積 = $\frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt{489}}{2} \right) \left(\frac{5\sqrt{489}}{163} \right)$

1M

$$= \frac{5}{2}$$

1A

8. (a) $\overrightarrow{PA} = (6-t)\mathbf{i} - 12\mathbf{k}$ 及 $\overrightarrow{PB} = (1-t)\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 12\mathbf{k}$ 。 1M

$$\sqrt{(6-t)^2 + 12^2} = \sqrt{(1-t)^2 + 5^2 + 12^2} \quad 1M$$

$$t^2 - 12t + 36 = t^2 - 2t + 26$$

$$t = 1$$

(b) (i) $\overrightarrow{CA} = -\mathbf{i} - 8\mathbf{j}$

$$\overrightarrow{CB} = -6\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$$

$$\overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CB} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & -8 & 0 \\ -6 & -3 & 0 \end{vmatrix} \quad 1M$$

$$= -45\mathbf{k}$$

所求單位向量為 $\mathbf{k}$ 及 $-\mathbf{k}$ 。 1A

(ii) $\overrightarrow{CD} = -3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$

設 θ 為所求之角。

$$\overrightarrow{CD} \cdot \mathbf{k} = (CD)|\mathbf{k}| \cos \theta \quad 1M$$

$$5 = \sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} \cos \theta$$

$$\theta = 45^\circ \quad 1A$$

(iii) $\overrightarrow{DE} = \frac{\overrightarrow{DC} \cdot \mathbf{k}}{1^2}(\mathbf{k}) \quad 1M$

$$= -5\mathbf{k}$$

$$\overrightarrow{PE} = \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OP}$$

$$= 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 12\mathbf{k}$$

$$PE = \sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2}$$

$$= 13 \quad 1A$$

由於 $PA = PB = PE = 13$, E 在該球體上。

同意該宣稱。 1A