

REG-2223-MOCK-SET 1-MATH-CP 1

建議題解

1. (a) $2a - 3b = 5(b + 4)$	
$2a - 3b = 5b + 20$	1M
$(-3 - 5)b = 20 - 2a$	1M
$b = \frac{-10 + a}{4}$	1A
(b) 30	1A
2. $\frac{4}{2x+3} + \frac{5}{6-7x} = \frac{4(6-7x) + 5(2x+3)}{(2x+3)(6-7x)}$	1M
$= \frac{(-28+10)x + (24+15)}{(2x+3)(6-7x)}$	1M
$= \frac{39-18x}{(2x+3)(6-7x)}$	1A
3. $21^2 + (25+a)^2 = (9-4a)^2$	1M
$-15a^2 + 122a + 985 = 0$	1M
$a = -5$ 或 $\frac{197}{15}$ (捨去)	1A
4. (a) $9x^2 - 25 = (3x+5)(3x-5)$	1A
(b) $3x^2y - 7xy - 20y = y(3x^2 - 7x - 20)$	
$= y(3x+5)(x-4)$	1A
(c) $9x^2 - 25 - 3x^2y + 7xy + 20y = (3x+5)(3x-5) - y(3x+5)(x-4)$	1M
$= (3x+5)(3x-5-xy+4y)$	1A
5. 設標價為 \$x\$。	
$\frac{x}{1+75\%} - x(1-60\%) = 1200$	2M+1A
$\frac{6x}{35} = 1200$	1M
$x = 7000$	1A
6. (a) $2(x-3) < \frac{4x+21}{4}$	
$x < \frac{45}{4}$	1A
$15-2x \leq 7$	
$x \geq 4$	1A
因此, $4 \leq x < \frac{45}{4}$ 。	1M
(b) 8	1A

解	分
7. 設長度為 $5k$ cm。則闊度為 $3k$ cm。 $\frac{5k+8}{3k+3} = \frac{16}{9}$ $45k + 72 = 48k + 48$ $k = 8$ 原來的闊度為 24 cm。	1A 1M+1A 1A
8. (a) $1.36 = \frac{0(2) + 1(p) + 2(5) + 3(3)}{2 + p + 5 + 3}$ $1.36(10 + p) = 19 + p$ $p = 15$ 標準差 ≈ 0.794 (b) 中位數 = 1，眾數 = 1。 它們是相同的。	1M 1A 1A 1A
9. (a) 設較小的半球體的半徑為 r cm。 $\frac{2}{3}\pi r^3 \left(1 + \frac{125}{64}\right) = 1008\pi$ $r^3 = 512$ $r = 8$ (b) 總表面面積 = $2\pi(8)^2 + \pi(8)^2$ $= 192\pi \text{ cm}^2$	1M 1A 1M 1A
10. (a) 設 $C = a + \frac{b}{n}$，其中 a 及 b 均為非零常數。 $\begin{cases} 1600 = a + \frac{b}{200} \\ 1550 = a + \frac{b}{400} \end{cases}$ 求解後，可得 $a = 1500$ 及 $b = 20\,000$。 所求成本 = $1500 + \frac{20\,000}{500} = \\1540。 (b) $2020 = 1500 + \frac{20\,000}{n}$ $n \approx 38.5, \text{ 不是整數}$ 不可能。	1A 1M 1A 1A 1M 1A

解	分
11. (a) 設 $f(x) = (x^2 + 6x - 7)(Ax + B)$，其中 A 及 B 均為常數。 $\begin{cases} f(-1) = 96 = (1 - 6 - 7)(-A + B) \\ f(2) = 9 = (4 + 12 - 7)(2A + B) \end{cases}$ 求解後，可得 $A = 3$ 及 $B = -5$。 商式為 $3x - 5$。 (b) $(x^2 + 6x - 7)(3x - 5) = 2x + 14$ $(x + 7)(x - 1)(3x - 5) - 2(x + 7) = 0$ $(x + 7)[(x - 1)(3x - 5) - 2] = 0$ $(x + 7)(3x^2 - 8x + 3) = 0$ $x = -7 \text{ 或 } \frac{8 \pm \sqrt{8^2 - 4(3)(3)}}{2(3)}$ $= -7 \text{ 或 } \frac{4 \pm \sqrt{7}}{3}$ 由於 $\frac{4 \pm \sqrt{7}}{3}$ 為無理數，同意該宣稱。	1M 1M 1A 1M 1A 1A
12. (a) 四分位數間距 = $2.8 - 1.9$ $= 0.9 \text{ h}$ (b) (i) $m = 2.4$ $n = 1.1 + 2.0 = 3.1$ (ii) 偉明的跑步時間的四分位數間距（0.9 小時）小於志誠（1.1 小時）。 教練應選偉明。 (iii) 根據過往表現， 偉明破比賽紀錄的概率 = $\frac{5}{19}$； 志誠破比賽紀錄的概率 $\leq 0.25 < \frac{5}{19}$。 教練應選偉明。	1A 1A 1A 1A 1M 1A 1A 1A

解		分																		
13.	(a) $AB^2 + BC^2 - AC^2 = 5^2 + 12^2 - 13^2 = 0$ 故此， $AB^2 + BC^2 = AC^2$ 及 $\angle ABC = 90^\circ$ 。 (b) $\angle ADC = 180^\circ - \angle ABC = 90^\circ$ 設 $AD = DC = x$ cm。 $x^2 + x^2 = 13^2$ $x = \frac{13\sqrt{2}}{2}$ 所求周界 $= 5 + 12 + \frac{13\sqrt{2}}{2} \times 2$ $= (17 + 13\sqrt{2}) \text{ cm}$ (c) 設 h 為由 D 至 AC 的最短距離。 $\frac{1}{2}(h)(13) = \frac{1}{2}\left(\frac{13\sqrt{2}}{2}\right)^2$ $h = 6.5$ 點 F 不存在。	1M 1A 1M 1A 1M 1A																		
14.	(a) $\angle MOS = \angle NTQ$ (平行四邊形對角) $OS = TQ$ (平行四邊形對邊) $\angle MSO = \angle NRO$ (同位角， $PS \parallel QR$) $= \angle NQT$ (錯角， $OR \parallel PT$) $\triangle OMS \cong \triangle TNQ$ (ASA) <table><tr><th colspan="3">評分標準</th></tr><tr><td>情況 1</td><td>附有正確理由的任何正確證明。</td><td>2</td></tr><tr><td>情況 2</td><td>未附有正確理由的任何正確證明。</td><td>1</td></tr></table> (b) $\angle MOS = \angle NSR$ (同位角， $OQ \parallel ST$) $\angle MSO = \angle NRS = 90^\circ$ (同位角， $PS \parallel QR$) $\triangle OMS \sim \triangle SNR$ (AA) <table><tr><th colspan="3">評分標準</th></tr><tr><td>情況 1</td><td>附有正確理由的任何正確證明。</td><td>2</td></tr><tr><td>情況 2</td><td>未附有正確理由的任何正確證明。</td><td>1</td></tr></table> (c) $OS = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$ cm $\frac{MS}{6} = \frac{8 - MS}{8}$ $MS = \frac{24}{7} \text{ cm}$ 所求比例 $= \left(8 - \frac{24}{7}\right) : \frac{24}{7}$ $= 4 : 3$	評分標準			情況 1	附有正確理由的任何正確證明。	2	情況 2	未附有正確理由的任何正確證明。	1	評分標準			情況 1	附有正確理由的任何正確證明。	2	情況 2	未附有正確理由的任何正確證明。	1	
評分標準																				
情況 1	附有正確理由的任何正確證明。	2																		
情況 2	未附有正確理由的任何正確證明。	1																		
評分標準																				
情況 1	附有正確理由的任何正確證明。	2																		
情況 2	未附有正確理由的任何正確證明。	1																		

解	分
15. (a) 方法數目 = $C_2^6 = 15$	1A
(b) 所求概率 = $1 - \frac{15}{C_4^{12}}$	1M
$= \frac{32}{33}$	1A
16. (a) 直線的斜率 = $\frac{11-8}{3-0} = 1$	
$\log_2 y = x + 8$	1M
$y = 2^{x+8}$	
$= 256(2^x)$	
因此， $a = 256$ 及 $b = 2$ 。	1A+1A
(b) $256(2^{2t}) - 256(2^t) \geq 32\,768$	1M
$256(2^{2t}) - 256(2^t) - 32\,768 \geq 0$	
$2^t \geq 11.8$ 或 $2^t \leq -10.8$ (捨去)	
$t \log 2 \geq \log 11.8$	1M
$t \geq 3.56$	
t 的最小整數值為 4。	1A
17. (a) $f(x) = ax^2 + 8a^2x + 16a^3 + a$	
$= a(x^2 + 8ax + 16a^2) + a$	1M
$= a(x + 4a)^2 + a$	
頂點的坐標為 $(-4a, a)$ 。	1A
(b) (i) $y = f(x)$ 的圖像向右平移 $5a$ 單位，	1A
然後沿 y 軸放大至原來的 4 倍	1A
成為 $y = g(x)$ 的圖像。	
(ii) $(a, 4a)$	1A
(iii) $P(-4a, a)$ 及 $Q(a, 4a)$	
$(OP \text{ 的斜率}) \times (OQ \text{ 的斜率}) = \frac{a-0}{-4a-0} \times \frac{4a-0}{a-0}$	1M
$= -1$	
故此， $\angle POQ = 90^\circ$ ，垂心在 O 。	1M
因此，垂心的坐標為 $(0, 0)$ 。	1A

解	分
18. (a) $30 + 30r + 30r^2 = 52.5$	1M
$30r^2 + 30r - 22.5 = 0$	
$r = \frac{1}{2}$ 或 $-\frac{3}{2}$ (捨去)	1A
(b) 汽球的高度 $\leq \frac{30}{1 - \frac{1}{2}}$	1M
$= 60 \text{ m} < 75 \text{ m}$	
該汽球不能到達 75 m 的高度。	1A
(c) 設所需時間為 n 分鐘。	
$\frac{30(1 - 0.5^n)}{1 - 0.5} = 58.125$	1M
$0.5^n = 0.03125$	
$n \log 0.5 = \log 0.03125$	1M
$n = 5$	
所求時間為 5 分鐘。	1A

19. (a) 設 O 為圓 $ABCD$ 的外心。

$$\angle BAC = \angle DAC \quad (\text{已知})$$

$$\angle BOC = 2\angle BAC \quad (\text{圓心角兩倍於圓周角})$$

$$\angle DOC = 2\angle DAC \quad (\text{圓心角兩倍於圓周角})$$

$$= \angle BOC$$

$$BC = CD \quad (\text{等角對等弦})$$

評分標準		
情況 1	附有正確理由的任何正確證明。	3
情況 2	未附有理由的任何正確證明。	2
情況 3	附有一正確理由和一正確步驟之未完整的證明。	1

- (b) (i) 設 M 的坐標為 $(a, -a)$ 使得它在 $y = -x$ 上。

$$\sqrt{(a-0)^2 + (-a-0)^2} = \sqrt{(a+200)^2 + (-a+600)^2}$$

$$2a^2 = 2a^2 - 800a + 400\,000$$

$$a = 500$$

所求方程為

$$(x-500)^2 + (y+500)^2 = (0-500)^2 + (0+500)^2$$

$$(x-500)^2 + (y+500)^2 = 500\,000$$

M 的坐標為 $(500, -500)$ 。

$$(ii) (0-500)^2 + (y+500)^2 = 500\,000$$

$$(y+500)^2 = 250\,000$$

$$y = -1000 \quad \text{或} \quad 0 \quad (\text{捨去})$$

C 的坐標為 $(0, -1000)$ 。

- (c) 設 K 為 VC 上的一點使得 $BK \perp VC$ 。

則 $DK \perp VC$ 及所求之角為 $\angle BKD$ 。

$$BM = CM = DM = \sqrt{(500+200)^2 + (-500+600)^2} = 500\sqrt{2}$$

$$BC = CD = \sqrt{200^2 + (-1000+600)^2} = 200\sqrt{5}$$

$$VB = VC = VD = \sqrt{MB^2 + 50^2} = 50\sqrt{201}$$

$$MB^2 = MC^2 + BC^2 - 2(MC)(BC) \cos \angle BCM$$

$$\angle BCM \approx 71.6^\circ$$

$$BD = 2 \times BC \sin \angle BCM \approx 849$$

$$VB^2 = VC^2 + BC^2 - 2(VC)(BC) \cos \angle VCB$$

$$\angle VCB \approx 71.6^\circ$$

$$DK = BK = BC \sin \angle VCB \approx 424$$

$$BD^2 = BK^2 + DK^2 - 2(BK)(DK) \cos \angle BKD$$

$$\angle BKD \approx 177^\circ$$