

REV-FG-2223-ASM-SET 2-MATH

建議題解

結構式試題

1. (a) $3 = -3^2 + 8(3) + k$ 1M
 $k = -12$ 1A
 - (b) $0 = -x^2 + 8x - 12$
 $x = 2$ 或 6
 A 及 B 的坐標分別為 $(2, 0)$ 及 $(6, 0)$ 。 1A+1A
 - (c) (i) AB 的中點的 x 坐標 $= \frac{2+6}{2} = 4$ 。
對稱軸為 $x = 4$ 。 1A
 - (ii) $CP : PB = (4 - 3) : (6 - 4)$ 1M
 $= 1 : 2$ 1A
-
2. (a) $CD = BE = \sqrt{(3x)^2 + (4x)^2}$ 1M
 $= 5x \text{ cm}$ 1A
 - (b) (i) $BC = \frac{96 - 3x - 4x - 5x}{2}$ 1M
 $= (48 - 6x) \text{ cm}$
長方形的面積 $= (48 - 6x)(5x)$
 $= 30x(8 - x) \text{ cm}^2$ 1A
 - (ii) 面積 $= -30x^2 + 240x + 6x^2$
 $= -24[x^2 - 2(x)(5) + 5^2] + 600$ 1M
 $= -24(x - 5)^2 + 600$ 1A
 $ABCDE$ 的極大面積為 600 cm^2 。 1A

3. (a) 可得

$$\begin{cases} 400 = 150 + A(180)(5) + 25B \\ 438 = 150 + A(200)(8) + 64B \end{cases} \quad 1M$$

求解後， $A = \frac{1}{2}$ 及 $B = -8$ 。 1M+1

因此， $P = 150 + \frac{\theta t}{2} - 8t^2$ 。

(b) (i) $P = 150 + \frac{220(10)}{2} - 8(10)^2 = 450$ 1A

(ii) 當 $\theta = 160$ 及 $P = 450$ 時，

$$450 = 150 + \frac{160t}{2} - 8t^2$$

$$2t^2 - 20t + 75 = 0$$

$$\Delta = (-20)^2 - 4(2)(75) = -200 < 0 \quad 1M$$

t 沒有實數解。

因此，不可能藉改變焗爐內的時間以達至 (b)(i) 的 P 值。 1A

(c) $P = 150 + \frac{160}{2}t - 8t^2$

$$= -8[t^2 - 2(5)(t) + 5^2] + 350 \quad 1M$$

$$= -8(t - 5)^2 + 350$$

因此，當 $t = 5$ 時， P 達至其極大值。

所求時間為 5 分鐘。 1A

4. (a) $0 = 3x^2 - 9x - 12$

$$x = 4 \quad \text{或} \quad -1$$

A 及 B 的坐標分別為 $(-1, 0)$ 及 $(4, 0)$ 。 1A+1A

C 的坐標為 $(0, -12)$ 。 1A

(b) $y = 3x^2 - 9x - 12$

$$= 3 \left[x^2 - 2 \left(\frac{3}{2} \right) x + \left(\frac{3}{2} \right)^2 \right] - \frac{75}{4} \quad 1M$$

$$= 3 \left(x - \frac{3}{2} \right)^2 - \frac{75}{4} \quad 1M$$

Q 的坐標為 $\left(\frac{3}{2}, -\frac{75}{4} \right)$ 。 1A

(c) $ABQC$ 的面積 $= \frac{1}{2}(1)(12) + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} \right) \left(12 + \frac{75}{4} \right) + \frac{1}{2} \left(4 - \frac{3}{2} \right) \left(\frac{75}{4} \right)$ 1M

$$= \frac{105}{2} \quad 1A$$

5. (a) (i) $\alpha + \beta = 6$ 及 $\alpha\beta = p$ 1A
- $$\begin{aligned}\alpha^2 + \beta^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta & 1M \\ &= (6)^2 - 2p \\ &= 36 - 2p & 1A\end{aligned}$$
- (ii) $(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$ 1M
- $$\begin{aligned}&= (6)^2 - 4p \\ &= 36 - 4p & 1A\end{aligned}$$
- (b) $\Delta = (-6)^2 - 4(1)(p) > 0$ 1M+1A
- $$p < 9 \quad 1A$$
- (c) (i) $y = x^2 - 6x + 2$
- $$\begin{aligned}&= [x^2 - 2(3)(x) + 3^2] - 7 & 1M \\ &= (x - 3)^2 - 7\end{aligned}$$
- V 的坐標為 $(3, -7)$ 。 1A
- (ii) 設 A 及 B 的坐標分別為 $(\alpha, 0)$ 及 $(\beta, 0)$ 。
- $$\begin{aligned}OB - OA &= \beta - \alpha \\ &= \sqrt{(\beta - \alpha)^2} & 1M\end{aligned}$$
- 利用 (a)(ii) 的結果，代 $p = 2$ ，
- $$\begin{aligned}OB - OA &= \sqrt{36 - 4(2)} \\ &= 2\sqrt{7} & 1A\end{aligned}$$
- (iii) $\triangle ABV$ 的面積 $= \frac{(2\sqrt{7})(7)}{2}$ 1M
- $$= 7\sqrt{7}$$

6. (a) $b = 6$

由於 α 及 β 均為方程 $x^2 + ax + b = 0$ 的根。

$$\alpha\beta = b = 6$$

1A

(b) (i) $y = x^2 + ax + 6$

$$= \left[x + ax + \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right] + 6 - \frac{a^2}{4}$$

1M

$$= \left(x + \frac{a}{2} \right)^2 + 6 - \frac{a^2}{4}$$

1A

若 $\triangle ABC$ 的面積為 $\triangle ABP$ 的面積的兩倍，

$$2 \left[\frac{a^2}{4} - 6 \right] = 6$$

1M+1M

$$\frac{a^2}{2} - 9 = 0$$

$$a = 6 \quad \text{或} \quad -6 \quad (\text{捨去})$$

1A

(ii) 據 (b)(i)， P 的坐標為 $\left(-\frac{6}{2}, 6 - \frac{6^2}{4} \right) = (-3, -3)$ 。

1A

(c) $x^2 + 6x + 6 = 0$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4(1)(6)}}{2(1)}$$

1M

$$= -3 \pm \sqrt{3}$$

所以， $\alpha = -3 + \sqrt{3}$ 及 $\beta = -3 - \sqrt{3}$ 。

$OA = 3 - \sqrt{3}$ 及 $AB = 2\sqrt{3} \neq 2OA$ 。

1A

不同意該宣稱。

1A

7. (a) $y = -\frac{1}{2}(x-h)^2 + 8$ 的圖像的頂點為 $(h, 8)$ 。 1M

兩圖像有同一頂點。由於 $f(2) = 8$ ，可得 $h = 2$ 。 1A

(b) (i) 所求面積 $= \frac{(AB+d)k}{2} = \frac{(12-k)k}{2}$ 1A

(ii) $OABD$ 的面積 $= -\frac{1}{2}k^2 + 6k$
 $= -\frac{1}{2}[k^2 - 2(6)(k) + 6^2] + 18$ 1M
 $= -\frac{1}{2}(k-6)^2 + 18$

$OABD$ 的面積當 $k = 6$ 時為極大。 1A

當 $y = 6$ ，

$$6 = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 8$$
 1M

$$(x-2)^2 = 4$$

$$x = 0 \quad \text{或} \quad 4$$

故此， $AB = 4$ 。 1A

$$4 + d + 6 = 12$$

$$d = 2$$

因此， $D = (2, 0)$ 。 1A

8. (a) $y = x^2 - 8x + 12$
 $= (x^2 - 8x + 16) - 4$ 1M

$$= (x-4)^2 - 4$$

V 的坐標為 $(4, -4)$ 。 1A

(b) $C(0, 12)$ 1A

$$0 = x^2 - 8x + 12$$

$$x = 2 \quad \text{或} \quad 6$$

故此， $A(2, 0)$ 及 $B(6, 0)$ 。 1A

$$AVBC \text{ 的面積} = \frac{(6-2)(12)}{2} + \frac{(6-2)(4)}{2}$$
 1A

$$= 32$$

(c) AV 的斜率 $= \frac{0+4}{2-4} = -2$ ， AC 的斜率 $= \frac{12-0}{0-2} = -6$ 1M

$$BV \text{ 的斜率} = \frac{0+4}{6-4} = 2$$
， BC 的斜率 $= \frac{12-0}{0-6} = -2$

$AV \parallel BC$ 而 AC 不平行於 BV 。

故此， $AVBC$ 為梯形。 1

(d) 設所求之高為 h 。

$$32 = \frac{(\sqrt{12^2 + 6^2} + \sqrt{4^2 + (2-4)^2})h}{2}$$
 1M+1M

$$h \approx 3.58$$
 1A

所求之高為 3.58。

9. (a) L_1 的斜率 $= \frac{4-1}{2+1} = 1$ 。 L_1 的方程為

$$y - 4 = 1(x - 2) \quad 1M$$

$$y = x + 2 \quad 1A$$

- (b) (i) L_2 的斜率 $= -1$ 。 L_2 的方程為

$$y - a^2 = -(x - a) \quad 1M$$

$$y = -x + a + a^2 \quad 1A$$

(ii) 解 $\begin{cases} y = x + 2 \\ y = -x + a + a^2 \end{cases}$ 。

$$x + 2 = -x + a + a^2 \quad 1M$$

$$x = \frac{a^2 + a - 2}{2}$$

當 $x = \frac{a^2 + a - 2}{2}$ 時, $y = \frac{a^2 + a - 2}{2} + 2 = \frac{a^2 + a + 2}{2}$ 。

故此, $D\left(\frac{a^2 + a - 2}{2}, \frac{a^2 + a + 2}{2}\right)$ 。 1A

$$DP^2 = \left(\frac{a^2 + a - 2}{2} - a\right)^2 + \left(\frac{a^2 + a + 2}{2} - a^2\right)^2 \quad 1M$$

$$= \frac{(a^2 - a - 2)^2}{4} + \frac{(-a^2 + a + 2)^2}{4}$$

$$= \frac{2(a^2 - a - 2)^2}{4}$$

$$DP = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(a^2 - a - 2)^2}$$

由於當 $-1 \leq a \leq 2$ 時, $a^2 - a - 2 = (a - 2)(a + 1) \leq 0$, 1M

$$DP = \frac{-1}{\sqrt{2}}(a^2 - a - 2) \quad 1$$

(iii) $AB = \sqrt{(4-1)^2 + (2+1)^2} = 3\sqrt{2}$

$$\triangle ABP \text{ 的面積} = \frac{1}{2}(3\sqrt{2})\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}(a^2 - a - 2)\right) \quad 1M$$

$$= -\frac{3}{2}\left[\left(a^2 - a + \frac{1}{4}\right) - \frac{9}{4}\right] \quad 1M$$

$$= -\frac{3}{2}\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{27}{8}$$

$\triangle ABP$ 的最大面積為 $\frac{27}{8}$, 對應 $P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ 。 1A+1A