REG-COT-2223-ASM-SET 3-MATH
建議題解

結構式試題

1. (a) $a = \dfrac{(PQ)r}{2} + \dfrac{(QR)r}{2} + \dfrac{(PR)r}{2}$ 1M

$= \dfrac{r}{2}(PQ + QR + PR)$

$= \dfrac{pr}{2}$ 1

(b) $AB = \sqrt{(9-2)^2 + (18+6)^2} = 25$、$BC = \sqrt{32^2 + 24^2} = 40$ 及 $AC = 39$。

設 $\triangle ABC$ 的內切圓的半徑為 r。

$\dfrac{(41-2)(18+6)}{2} = \dfrac{(25+40+39)r}{2}$ 1M

$r = 9$ 1A

所求 y 坐標 $= -6 + 9 = 3$ 1A

2. (a) $f(x) = x^2 - 6kx + 12k^2 + 6$

$= (x^2 - 6x + 9k^2) + 3k^2 + 6$ 1M

$= (x - 3k)^2 + 3k^2 + 6$

頂點的坐標為 $\left(3k,\ 3k^2 + 6\right)$。 1A

(b) $P\left(3k - 3,\ 3k^2 + 6\right)$ 及 $Q\left(3k + 3,\ -3k^2 - 6\right)$。 1A

考慮由點 $(0,\ 6)$ 至點 P 及至點 Q 的距離。

$\sqrt{(3k-3)^2 + (3k^2)^2} = \sqrt{(3k+3)^2 + (-3k^2 - 6 - 6)^2}$ 1M

$-72k^2 - 36k - 144 = 0$

$\Delta = 36^2 - 4(-72)(-144) = -40\,176 < 0$ 1M

該方程沒有實根。

因此，點 R 不存在。 1A

3. (a) $PB = PD$ 及 $\angle PBD = \dfrac{180^\circ - x}{2} = 90^\circ - \dfrac{x}{2}$ 1M

$\angle BAD = \angle PBD = 90^\circ - \dfrac{x}{2}$ 1A

$\angle ABC = 90^\circ$

$\angle AQB = 180^\circ - 90^\circ - \left(90^\circ - \dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{x}{2}$ 1A

(b) (i) 由於 $PB = PD = PR$，可得 $\angle BRD = \angle PDR$。 1M

$\angle BRD + \angle PDR = x$

$\angle BRD = \dfrac{x}{2}$ 1A

(ii) 留意 $\angle BRD = \angle BQD = \dfrac{x}{2}$。

B、D、Q、R 共圓。 1M

由於 $PB = PD = PR$，P 為圓 BDR 的圓心，即圓 $BDQR$ 的圓心。

因此，P 為 $\triangle BDQ$ 的外接圓的圓心。

同意該宣稱。 1A

4. (a) $\angle BPA = 90°$ （已知）

$\angle GMA = 90°$ （外心性質）

$= \angle BPA$

$BC // GM$ （同位角相等）

$\angle BDC = \angle MDG$ （對頂角）

$\angle CBD = \angle GMD$ （錯角，$BC // GM$）

$\triangle BCD \sim \triangle MGD$ （AA）

評分標準		
情況 1	附有正確理由的任何正確證明。	3
情況 2	未附有理由的任何正確證明。	2
情況 3	附有一正確理由和一正確步驟之未完整的證明。	1

(b) (i) $GM = \sqrt{r^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - a^2}$ 1A

G 的坐標為 $\left(\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{4r^2 - a^2}}{2}\right)$。

$$BG = r$$

$$\left(\frac{a}{2} - b\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{4r^2 - a^2}}{2} - h\right)^2 = r^2 \qquad \text{1M}$$

$$\left(\frac{\sqrt{4r^2 - a^2}}{2} - h\right)^2 = r^2 - \frac{(a - 2b)^2}{4}$$

由於 $h > GM > 0$，$\frac{\sqrt{4r^2 - a^2}}{2} - h < 0$。

$$\frac{\sqrt{4r^2 - a^2}}{2} - h = -\sqrt{r^2 - \frac{(a - 2b)^2}{4}}$$

$$h = \frac{\sqrt{4r^2 - a^2}}{2} + \frac{\sqrt{4r^2 - (a - 2b)^2}}{\sqrt{4}}$$

$$= \frac{\sqrt{4r^2 - a^2 + 4ab - 4b^2} + \sqrt{4r^2 - a^2}}{2} \qquad \text{1}$$

(ii) $BD : DM = 2 : 1$ 1A

$BC : GM = BD : DM = 2 : 1$ 及 $BC = 2GM = \sqrt{4r^2 - a^2}$ 1M

$CP = h - \sqrt{4r^2 - a^2} = \frac{\sqrt{4r^2 - a^2 + 4ab - 4b^2} - \sqrt{4r^2 - a^2}}{2}$

（AB 的斜率）×（OC 的斜率）

$$= \frac{h - 0}{b - a} \times \frac{CP}{b} \qquad \text{1M}$$

$$= \frac{1}{4b(b - a)}\left[(\sqrt{4r^2 - a^2 + 4ab - 4b^2})^2 - (\sqrt{4r^2 - a^2})^2\right]$$

$$= \frac{4b(a - b)}{4b(b - a)}$$

$$= -1$$

由於 $BC \perp OA$ 及 $OC \perp AB$，C 為 $\triangle OAB$ 的垂心。 1

(iii) $h = \dfrac{\sqrt{4r^2 - a^2 + 4ab - 4b^2} + \sqrt{4r^2 - a^2}}{2} = 49$

$CP = h - \sqrt{4r^2 - a^2} = 31$

D 的 x 坐標 $= \dfrac{2\left(\frac{80}{2}\right) + 31}{1 + 2} = 37$ 1M

所求面積 $= \dfrac{(40 - 31)(49)}{2} - \dfrac{(49 - 31)(37 - 31)}{2}$

$= \dfrac{333}{2}$ 1A

– 試卷完 –