

REV-POLY-2223-ASM-SET 2-MATH

建議題解

多項選擇題

1. B

$$\begin{array}{r}
 \overline{x^2 + x + 3} \\
 -x+3 -x^3 + 2x^2 + 0x + 5 \\
 \underline{-x^3 + 3x^2} \\
 x^2 + 0x \\
 \underline{-x^2 + 3x} \\
 -3x + 5 \\
 \underline{-3x + 9} \\
 -4
 \end{array}$$

2. B

$$\begin{aligned}
 \text{所求多項式} &= (x^2 - 3x - 10)(3x - 1) + (3x - 2) \\
 &= 3x^3 - 10x^2 - 24x + 8
 \end{aligned}$$

3. C

設所求多項式為 $p(x)$ 。

$$\begin{aligned}
 2x^3 - 3x + 5 &= p(x)(2x^2 + 4x + 5) + 15 \\
 2x^3 - 3x - 10 &= p(x)(2x^2 + 4x + 5) \\
 p(x) &= \frac{2x^3 - 3x - 10}{2x^2 + 4x + 5} \\
 &= x - 2
 \end{aligned}$$

4. B

$$\begin{aligned}
 2x^3 + px^2 - 4x - 1 &= (x^2 - 2x + q)(2x + 3) - 4 \\
 2x^3 + px^2 - 4x + 3 &= (x^2 - 2x + q)(2x + 3) \\
 \text{比較 } x^2 \text{ 的係數及常數項。}
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 3q = 3 \\ (1)(3) + (-2)(2) = p \end{cases}$$

求解後，可得 $p = -1$ 及 $q = 1$ 。

5. C

設 $3x^3 + 2x^2 - 27x - 15 = (3x^2 + kx + 6)(Ax + B) + 3$ ，其中 A 及 B 均為常數。

$$3x^3 + 2x^2 - 27x - 18 = (3x^2 + kx + 6)(Ax + B)$$

比較 x^3 的係數、 x 的係數及常數項。

$$\begin{cases} 3A = 3 \\ kB + 6A = -27 \\ 6B = -18 \end{cases}$$

求解後，可得 $A = 1$ 、 $B = -3$ 及 $k = 11$ 。

6. B

$$\begin{aligned} \text{餘數} &= \left[3 \left(\frac{-2}{3} \right) - 2 \right] \left[3 \left(\frac{-2}{3} \right) + 5 \right] + 3 \left(\frac{-2}{3} \right) + 2 \\ &= -12 \end{aligned}$$

7. B

$$\text{餘數} = \left(-\frac{1}{2} \right)^3 - \left(-\frac{1}{2} \right)^2 + 1 = \frac{5}{8}$$

8. C

$$\begin{aligned} \text{餘數} &= (-1)^3 - 4(-1)^2 - 7(-1) + 10 \\ &= 12 \end{aligned}$$

9. C

$$\begin{aligned} \text{餘數} &= 10 \left(\frac{-1}{2} \right)^3 - 33 \left(\frac{-1}{2} \right)^2 + 9 \left(\frac{-1}{2} \right) - 5 \\ &= -19 \end{aligned}$$

10. A

$$\text{可得 } P \left(\frac{3}{2} \right) = k。$$

$$\begin{aligned} \text{餘數} &= P \left(\frac{3}{2} \right) \\ &= k \end{aligned}$$

11. D

可得 $f(a) = 15$ 及 $g(a) = -3$ 。

$$\begin{aligned} \text{餘數} &= f(a) - g(a) \\ &= 15 - (-3) \\ &= 18 \end{aligned}$$

12. D

$$\begin{aligned} \text{餘數} &= (-1)^4 - 2(-1)^3 + 3(-1)^2 - 4(-1) + 5 \\ &= 15 \end{aligned}$$

13. A

$$\text{餘數} = (-1)^{2k+1} - k + k = (-1)^{2k+1} = -1$$

14. A

$$\begin{aligned}\text{餘數} &= (-1)^{2009} + (-1)^{2008} + (-1)^{2007} + \dots + (-1) \\ &= (-1 + 1) + (-1 + 1) + \dots + (-1) \\ &= -1\end{aligned}$$

15. C

$$\begin{aligned}-2 &= 6\left(\frac{1}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + a\left(\frac{1}{2}\right) - 1 \\ a &= -3\end{aligned}$$

16. B

$$\begin{aligned}\text{餘數} &= f(-1 + 1) \\ &= f(0) \\ &= (0 - 1)(0 + 3)(0 - a) \\ &= 3a\end{aligned}$$

17. D

$$\begin{aligned}\text{餘數} &= f(-3 - 3) \\ &= f(-6)\end{aligned}$$

18. C

- I. $\checkmark \circ f(-1) = -1 + 7 - 6 = 0 \Rightarrow x + 1$ 為 $f(x)$ 的因式。
 II. $\checkmark \circ f(-2) = -8 + 14 - 6 = 0 \Rightarrow x + 2$ 為 $f(x)$ 的因式。
 故此， $(x + 1)(x + 2)$ 為 $f(x)$ 的因式。

19. B

$$\begin{aligned}f(x) &= (2x^2 + x - 1)q(x), \text{ 其中 } q(x) \text{ 為一多項式。} \\ f(x) &= (2x - 1)(x + 1)q(x) \\ \text{可得 } f\left(\frac{1}{2}\right) &= f(-1) = 0.\end{aligned}$$

20. B

- A. $\times \circ (-2)^3 - 2(-2)^2 - (-2) + 2 = -12$
 B. $\checkmark \circ (-2)^3 + 2(-2)^2 - (-2) - 2 = 0$
 C. $\times \circ 2(-2)^3 - (-2)^2 - 2(-2) + 1 = -15$
 D. $\times \circ 2(-2)^3 + (-2)^2 - 2(-2) - 1 = -9$

21. D

$$(-1)^{2n} + k(-1) - 2k = 0$$

$$1 - 3k = 0$$

$$k = \frac{1}{3}$$

22. B

$$f(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$$

$$= (x - 1)(x^2 + 2x - 3)$$

$$= (x - 1)^2(x + 3)$$

23. D

可得 $f(-1) = f(2) = 0$ 。

$$\begin{cases} 0 = (-1)^3 + 2(-1)^2 - a + b \\ 0 = (2)^3 + 2(2)^2 + 2a + b \end{cases}$$

求解後，可得 $a = -5$ 及 $b = -6$ 。

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$$

$$= (x + 1)(x^2 + x - 6)$$

$$= (x + 1)(x - 2)(x + 3)$$

24. D

可得 $f(-2) = f(1) = 0$ 。

$$\begin{cases} 0 = (-2)^3 - 4(-2)^2 - 2a + b \\ 0 = 1 - 4 + a + b \end{cases}$$

求解後，可得 $a = -7$ 及 $b = 10$ 。

$$f(x) = x^3 - 4x^2 - 7x + 10$$

$$= (x + 2)(x^2 - 6x + 5)$$

$$= (x + 2)(x - 1)(x - 5)$$

25. B

$$4^3 + k(4)^2 + 2k(4) + 8 = 0$$

$$k = -3$$

$$P(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$$

利用計算機， $P(1) = P(-2) = 0$ 。故此， $(x - 1)(x + 2)$ 為 $P(x)$ 的因式。

只有選項 B 滿足以上條件。

26. D

可得 $f(-3) = -63$ 及 $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ 。

$$\begin{cases} -63 = a(-3)^3 + 2(-3)^2 + b(-3) + 3 \\ 0 = a\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + b\left(\frac{1}{2}\right) + 3 \end{cases}$$

求解後，可得 $a = 4$ 及 $b = -8$ 。

27. D

$$\begin{aligned} 2\left(\frac{-k}{2}\right)^4 + k\left(\frac{-k}{2}\right)^3 - 4\left(\frac{-k}{2}\right) - 16 &= 0 \\ 2k - 16 &= 0 \\ k &= 8 \end{aligned}$$

28. D

設 $f(x) = (x+1)q(x)$ ，其中 $q(x)$ 為一多項式。

$$\begin{aligned} f(3x+1) &= [(3x+1)+1]q(3x+1) \\ &= (3x+2)q(3x+1) \end{aligned}$$

因此， $3x+2$ 為 $f(3x+1)$ 的因式。

29. B

設 $f(x) = (x+1)q(x)$ ，其中 $q(x)$ 為一多項式。

$$\begin{aligned} f(3x-4) &= [(3x-4)+1]q(3x-4) \\ &= (3x-3)q(3x-4) \\ &= 3(x-1)q(3x-4) \end{aligned}$$

因此， $x-1$ 為 $f(3x-4)$ 的因式。

30. A

設 $f(x) = (x-1)q(x)$ ，其中 $q(x)$ 為多項式。

$$\begin{aligned} f(2x+1) &= [(2x+1)-1]q(2x+1) \\ &= 2xq(2x+1) \end{aligned}$$

因此， x 為 $f(2x+1)$ 的因式。

結構式試題

31. (a) 可得

$$\begin{cases} -7 = [3(3) + p](3 - 2)^2 + q \\ 0 = (12 + p)(2)^2 + q \end{cases} \quad 1M$$

求解後，可得 $p = \frac{-32}{3}$ 及 $q = \frac{-16}{3}$ 。 1A+1A

(b) $0 = \left(3x - \frac{32}{3}\right)(x - 2)^2 - \frac{16}{3}$

$$0 = (9x - 32)(x^2 - 4x + 4) - 16$$

$$0 = 9x^3 - 68x^2 + 164x - 144$$

$$0 = (x - 4)(9x^2 - 32x + 36)$$

1M+1A

$$x = 4 \quad \text{或} \quad 9x^2 - 32x + 36 = 0$$

$$\text{對 } 9x^2 - 32x + 36 = 0, \Delta = 32^2 - 4(9)(36) = -272 < 0。 \quad 1M$$

該方程沒有實根。

因此，共有 1 個實根。 1A

32. (a) (i) $f(-3) = m(-3)^3 + 3(m - 2)(-3)^2 - 13(-3) + 15$ 1M

$$= -27m + 27m - 54 + 39 + 15$$

$$= 0$$

因此， $x + 3$ 為 $f(x)$ 的因式。

1

(ii) $f(x) = (x + 3)(mx^2 - 6x + 5)$ 1A

(b) (i) 當 $f(x) = 0$ 時，

$$(x + 3)(mx^2 - 6x + 5) = 0$$

$$x = -3 \quad \text{或} \quad mx^2 - 6x + 5 = 0$$

若所有根為實數，

$$\Delta = 6^2 - 4(m)(5) \geq 0$$

1M

$$m \leq \frac{9}{5}$$

由於 $m \neq 0$ ，可得 $m < 0$ 或 $0 < m \leq \frac{9}{5}$ 。

1A

(ii) 代 $m = 1$ ，當 $f(x) = 0$ ，

1A

$$(x + 3)(x^2 - 6x + 5) = 0$$

$$(x + 3)(x - 1)(x - 5) = 0$$

$$x = -3 \quad \text{或} \quad 1 \quad \text{或} \quad 5$$

同意該宣稱。

1A

33. (a) $f(-1) = h = -h - 1 + 9 + k$ 1M
- $$2h - k = 8$$
- $$0 = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{h}{8} - \frac{1}{4} - \frac{9}{2} + k$$
- 1M
- $$h + 8k = 38$$
- 求解後，可得 $h = 6$ 及 $k = 4$ 。 1A+1A
- (b) $f(x) = 6$
- $$6x^3 - x^2 - 9x - 2 = 0$$
- $$(x + 1)(6x^2 - 7x - 2) = 0$$
- 1M
- $$x = -1 \quad \text{或} \quad \frac{7 \pm \sqrt{7^2 - 4(6)(-2)}}{2(6)}$$
- 1M
- $$= -1 \quad \text{或} \quad \frac{7 \pm \sqrt{97}}{12}$$
- $f(x) = 6$ 有無理根。
- 不同意該宣稱。 1A
34. (a) 設 $f(x) = (x^2 - 4)(Ax + B) + 4x + k$ ，其中 A 及 B 均為常數。 1A
- $$f(2) = 0 + 4(2) + k = 0$$
- 1M
- $$k = -8$$
- 1A
- (b) 可得
- $$\begin{cases} f(-4) = (16 - 4)(-4A + B) - 16 - 8 = 0 \\ f(0) = (-4)(B) - 8 = 40 \end{cases}$$
- 1M
- 求解後，可得 $A = -\frac{7}{2}$ 及 $B = -12$ 。 1A
- $$f(x) = (x^2 - 4)\left(-\frac{7}{2}x - 12\right) + 4x - 8 = 0$$
- $$-\frac{1}{2}(x + 2)(x - 2)(7x + 24) + 4(x - 2) = 0$$
- $$\frac{1}{2}(x - 2)[-(x + 2)(7x + 24) + 8] = 0$$
- 1M
- $$\frac{1}{2}(x - 2)(-7x^2 - 38x - 40) = 0$$
- $$-\frac{1}{2}(x - 2)(7x + 10)(x + 4) = 0$$
- $$x = 2 \quad \text{或} \quad -4 \quad \text{或} \quad -\frac{10}{7}$$
- 不同意該宣稱。 1A

35. (a) 可得

$$\begin{cases} 0 = 4(3)(3+1)^2 + 3a + b \\ 2b + 165 = 4(-2)(-2+1)^2 - 2a + b \end{cases} \quad 1M$$

故此， $3a + b = -192$ 及 $-2a - b = 173$ 。

求解後，可得 $a = -19$ 及 $b = -135$ 。 1A+1A

(b) $0 = 4x(x+1)^2 - 19x - 135$

$$= 4x^3 + 8x^2 - 19x - 135 \quad 1A$$

$$= (x-3)(4x^2 + 20x + 45) \quad 1M$$

$$x = 3 \quad \text{或} \quad \frac{-20 \pm \sqrt{20^2 - 4(4)(45)}}{2(4)} \quad 1M$$

$$= 3 \quad \text{或} \quad -\frac{5}{2} \pm i\sqrt{5}$$

$f(x) = 0$ 的所有根均不是無理數，不同意該宣稱。 1A

36. (a) $p(x) = (x^2 + x + 1)(2x^2 - 37) + cx + c - 1$ 1M

$$(5^2 + 5 + 1)(2(5)^2 - 37) + 5c + c - 1 = 0 \quad 1M$$

$$c = -67 \quad 1A$$

(b) $p(-3) = (9 - 3 + 1)(18 - 37) - 67(-3) - 68$

$$= 0$$

因此， $x + 3$ 為 $p(x)$ 的因式。

1

(c) $0 = (x^2 + x + 1)(2x^2 - 37) - 67x - 68$

$$= 2x^4 + 2x^3 - 35x^2 - 104x - 105$$

$$= (x-5)(2x^3 + 12x^2 + 25x + 21)$$

$$= (x-5)(x+3)(2x^2 + 6x + 7) \quad 1M$$

$$x = 5 \quad \text{或} \quad -3 \quad \text{或} \quad 2x^2 + 6x + 7 = 0$$

對方程 $2x^2 + 6x + 7 = 0$ ， $\Delta = 6^2 - 4(2)(7) = -20 < 0$ 。 1M

$2x^2 + 6x + 7 = 0$ 的根不是實數。

該宣稱不正確。 1A