REG-COT-2223-ASM-SET 2-MATH

建議題解

結構式試題

1. (a) L_2 的斜率 $= -\dfrac{1}{2}$。L_1 的斜率 $= 2$。 1M

L_1 的方程為

$$y - 4 = 2(x - 3)$$

$$y = 2x - 2$$ 1A

(b) $B\,(8,\ 0)$ 及 $C\,(0,\ 4)$ 1A

由於 AC 平行於 x 軸，垂心的 x 坐標 $= 8$。 1A

設垂心的坐標為 $(8,\ k)$。

$$\frac{k-4}{8-0} \times \frac{4-0}{3-8} = -1$$ 1M

$$k = 14$$

所求坐標為 $(8,\ 14)$。 1A

2. (a) AB 的斜率 $= \dfrac{4-0}{3-2} = 4$ 1M

L 的方程為 $y = -\dfrac{x}{4}$。 1A

(b) 垂心在通過 B 的高線上，即 $x = 3$。

代 $x = 3$ 至 L 的方程，$y = -\dfrac{3}{4}$。 1M

垂心的坐標為 $\left(3,\ -\dfrac{3}{4}\right)$。 1A

3. (a) $CE \perp AB$ *（垂心性質）*

$BD \perp AC$ *（垂心性質）*

$\angle BEC = \angle BDC = 90^\circ$

因此，$BCDE$ 為圓內接四邊形。 *（同弓形內的圓周角的逆定理）*

評分標準		
情況 1	附有正確理由的任何正確證明。	2
情況 2	未附有正確理由的任何正確證明。	1

(b) (i) 圓心的坐標 $= \left(\dfrac{-6+14}{2},\ \dfrac{-6-6}{2}\right) = (4,\ -6)$ 1A

圓的方程為

$$(x-4)^2 + (y+6)^2 = (0-4)^2 + (8+6)^2$$ 1M

$$(x-4)^2 + (y+6)^2 = 100$$ 1A

(ii) A 與圓心的距離 $= \sqrt{4^2 + (-6-8)^2} = \sqrt{212}$

圓的半徑 $= 10$

兩切線之間的角 $= 2 \times \sin^{-1} \dfrac{10}{\sqrt{212}} \approx 86.8^\circ \neq 90^\circ$ 1M+1A

不同意該宣稱。 1A

4. (a) $\dfrac{y-2}{x-1} \times \dfrac{y-8}{x-9} = -1$ 1M+1A

$(y-2)(y-8) + (x-1)(x-9) = 0$

$x^2 + y^2 - 10x - 10y + 25 = 0$ 1A

(b) (i) $8^2 + 1^2 - 10(8) - 10(1) + 25 = 0$

因此，C 在 S 上。 1

(ii) $(5,\ 5)$ 1A

(iii) 由於 AB 是圓的直徑，$\angle ACB = 90°$。

所以，垂心 H 在點 $C\ (8,\ 1)$。 1M

外心 J 為 AB 的中點。連接 J 及 H 的線為 $\triangle ABC$ 的中線。

由於形心 G 在 $\triangle ABC$ 的中線上，G、J、H 共線。

同意該宣稱。 1A

5. (a) 設 $x = \angle BAI$ 及 $y = \angle ABI$。

$\angle PAC = \angle BAI = x$ （內心性質）

$PB = PC$ （等角對等弦）

$\angle PIB = \angle ABI + \angle BAI$ （△ 外角）

$= x + y$

$\angle IBC = \angle ABI = y$ （內心性質）

$\angle PBC = \angle PAC = x$ （同弓形內的圓周角）

$\angle IBP = x + y$

$= \angle PIB$

$PB = PI$ （等角對等邊）

因此，$PB = PI = PC$。

評分標準		
情況 1	附有正確理由的任何正確證明。	3
情況 2	未附有理由的任何正確證明。	2
情況 3	附有一正確理由和一正確步驟之未完整的證明。	1

(b) $\angle IAY = \angle PSC$ （同弓形內的圓周角）

$\angle AYI = 90°$ （已知）

$\angle SCP = 90°$ （半圓上的圓周角）

$= \angle AYI$

$\triangle IAY \sim \triangle PSC$ （AA）

評分標準		
情況 1	附有正確理由的任何正確證明。	3
情況 2	未附有理由的任何正確證明。	2
情況 3	附有一正確理由和一正確步驟之未完整的證明。	1

(c) $\dfrac{IY}{PC} = \dfrac{IA}{PS}$ 1M

$\dfrac{r}{IP} = \dfrac{AI}{2R}$

$AI \cdot IP = 2Rr$

同意該宣稱。 1A

(d) 設圓 BPC 的方程為 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$，其中 D、E 及 F 均為常數。

$$\begin{cases} (-16)^2 - 16D + F = 0 \\ (-8)^2 - 8E + F = 0 \\ 16^2 + 16D + F = 0 \end{cases}$$ 1M

求解後，可得 $D = 0$、$E = -24$ 及 $F = -256$。

外接圓的半徑 $= \sqrt{0^2 + 12^2 + 256} = 20$ 1A

$BP = \sqrt{16^2 + 8^2} = 8\sqrt{5}$ 1A

據 (c)，$AI = \dfrac{2Rr}{IP} = \dfrac{2(20)(9)}{8\sqrt{5}} = 9\sqrt{5}$ 1A

6. (a) $\angle OMQ = 90° = \angle ONQ$ （已知）

$AB = CD$ （已知）

$OM = ON$ （等弦對等角）

$OQ = OQ$ （公共邊）

$\triangle QNO \cong \triangle QMO$ （RHS）

評分標準		
情況 1	附有正確理由的任何正確證明。	2
情況 2	未附有正確理由的任何正確證明。	1

(b) (i) $OT = ON = 130$

$OQ = \sqrt{312^2 + 130^2} = 338$ 及 $OT : OQ = 130 : 338 = 5 : 13$

T 的 x 坐標 $= 312 \times \left(-\dfrac{5}{13}\right) = -120$ 1M

T 的 y 坐標 $= -130 \times \left(-\dfrac{5}{13}\right) = 50$

T 的坐標為 $(-120,\ 50)$。 1A

設 R 的坐標為 $(h,\ -130)$ 使得 $QR \perp ON$。

$$\frac{-130 - 50}{h + 120} \times \frac{50 - 0}{-120 - 0} = -1$$ 1M

$$h = -195$$

設 P 的坐標為 $(a,\ b)$。留意 T 為 PR 的中點。

$$\frac{a + (-195)}{2} = -120 \quad 及 \quad \frac{b + (-130)}{2} = 50$$ 1M

$$a = -45 \qquad\qquad b = 230$$

P 的坐標為 $(-45,\ 230)$。 1A

(ii) $OP = \sqrt{45^2 + 230^2} = \sqrt{54\,925} \neq OQ$ 1M

因此，O 不是 $\triangle PQR$ 的外心。

不同意該宣稱。 1A

– 試卷完 –