REG-COT-2223-ASM-SET 1-MATH
建議題解

多項選擇題

1. $\boxed{\text{B}}$

   I. ✗。垂心在 B。
   II. ✓。形心永遠在三角形內。
   III. ✗。內心永遠在三角形內。

2. $\boxed{\text{C}}$

   不包含任何步驟。

3. $\boxed{\text{D}}$

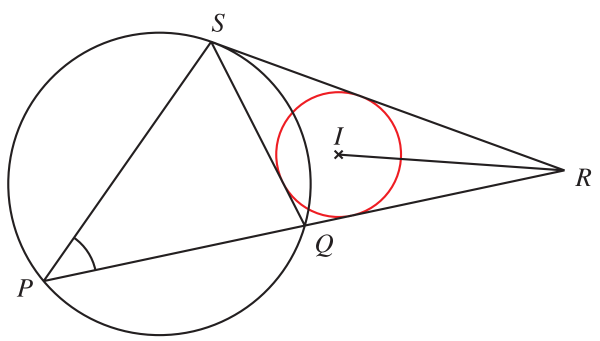
   I. ✓。AD 為 BC 的垂直平分線。
   II. ✓。AD 為通過 A 的高線。
   III. ✓。AD 為通過 A 的中線。

4. $\boxed{\text{C}}$

   I 為 $\triangle QRS$ 的內心。

   $\angle IRQ = \angle IRS = 12°$
   $\angle SRQ = 12° + 12° = 24°$
   $\angle QPS = \angle SQR$
   在 $\triangle PSR$ 中，

   $$70° + 2\angle QPS + 24° = 180°$$
   $$\angle QPS = 43°$$



5. $\boxed{\text{B}}$

   $BC = 2BL = 26\,\text{cm}$
   $AB = 2BN = 10\,\text{cm}$
   $AC = 2CM = 24\,\text{cm}$
   由於 $10^2 + 24^2 = 26^2$，$\angle BAC = 90°$。
   所求面積 $= \dfrac{(10)(24)}{2} = 120\,\text{cm}^2$

6. $\boxed{\text{C}}$

設圓心為 O。
BO 為 $\triangle ABC$ 的中線。故此，BEO 為一直線。
$\angle BAC = \angle ABE = 27°$
$\angle CBD = \angle BAC = 27°$
$\angle ABC = 90°$
在 $\triangle ABD$ 中，

$$\begin{aligned} x + 27° + (90° + 27°) &= 180° \\ x &= 36° \end{aligned}$$

7. $\boxed{\text{B}}$

設 $AC = 2$。則 $BC = 2$、$CD = 1$ 及 $AE = \dfrac{AB}{2} = \sqrt{2}$。
留意 $CE \perp AB$，$\angle ACE = \sin^{-1} \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 45°$。
$\angle CAD = \tan^{-1} \dfrac{1}{2} \approx 26.6°$
$\theta = 180° - 45° - \tan^{-1} \dfrac{1}{2} \approx 108°$
$\sin\theta \approx 0.948683.$
藉檢查所有選項，可得 $\sin\theta = \dfrac{3\sqrt{10}}{10}$。

8. $\boxed{\text{A}}$

I. ✓。設 $\triangle ABC$ 的內切圓的半徑為 r。
兩隻角均等於 $\tan^{-1} \dfrac{OV}{r}$。
II. ✓。設外接圓 ABC 的半徑為 R。
則 $OB = OC = R$，兩隻角均等於 $\tan^{-1} \dfrac{OV}{R}$。
III. ✗。若 $\angle ABC = 90°$，則點 O 與 B 重合。
平面 VAB 與平面 ABC 之間的角為 $90°$，而平面 VAC 與平面 ABC 之間的角不等於 $90°$。

9. $\boxed{\text{D}}$

外心的 y 坐標 $= \dfrac{(-2) + (8)}{2} = 3$
設外心的坐標為 $(h, 3)$。

$$\begin{aligned} \sqrt{(h-2)^2 + (3-8)^2} &= \sqrt{(h-10)^2 + (14-3)^2} \\ h^2 - 4h + 29 &= h^2 - 20h + 221 \\ 16h &= 192 \\ h &= 12 \end{aligned}$$

外心的 x 坐標為 12。

10. $\boxed{\text{A}}$

點 B 可藉將 A 繞原點逆時針旋轉 90° 得出。故此，$\angle AOB = 90°$。
外心為 1 AB 的中點，所求的 y 坐標 $= \dfrac{8-2}{2} = 3$

11. $\boxed{\text{A}}$

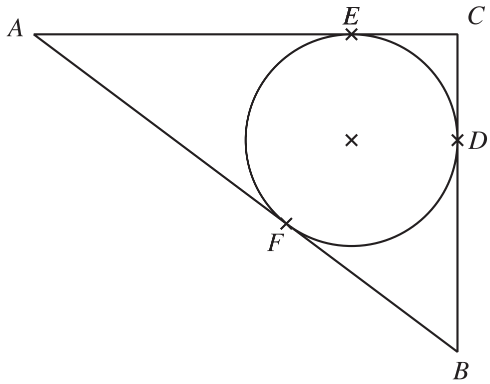
由於 AB 平行於 y 軸，通過 O 的高線平行於 x 軸。
設垂心 H 的坐標為 $(x,\ 0)$。由於 $AH \perp OB$，

$$\frac{12-0}{16-x} \times \frac{-12-0}{16-0} = -1$$
$$x = 7$$

12. $\boxed{\text{C}}$

設 D、E、F 分別為內切圓與 BC、AC、AB 的切點。

設 $CE = x$。則 $AE = 12 - x$、$CD = x$ 及 $BD = 5 - x$。
利用切線性質，$AF = 12 - x$ 及 $BF = 5 - x$。
由於 $AB = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$，可得 $x = 2$。
因此，內心的坐標為 $(10,\ 3)$。



13. $\boxed{\text{A}}$

外心在 OA 的垂直平分線上。
外心的 y 坐標 $= \dfrac{0+12}{2} = 6$

14. $\boxed{\text{A}}$

通過 Q 的高線為水平線。
垂心的 y 坐標 $= 48$
設垂心的坐標為 $(x,\ 48)$。

$$\frac{48-0}{x-0} \times \frac{60-48}{0-96} = -1$$
$$x = 6$$

15. $\boxed{\text{B}}$

留意 $\angle BAC = 90°$。

I. ✗。外心在 BC 的中點。

II. ✓。根據對稱性質，形心的 x 坐標為 1。

III. ✓。垂心在 A（直角三角形）。

16. $\boxed{\text{B}}$

三角形的頂點的坐標為 (0, 0)、(6, 0) 及 (0, 8)。
設內切圓的半徑為 r。
藉考慮三角形的面積，

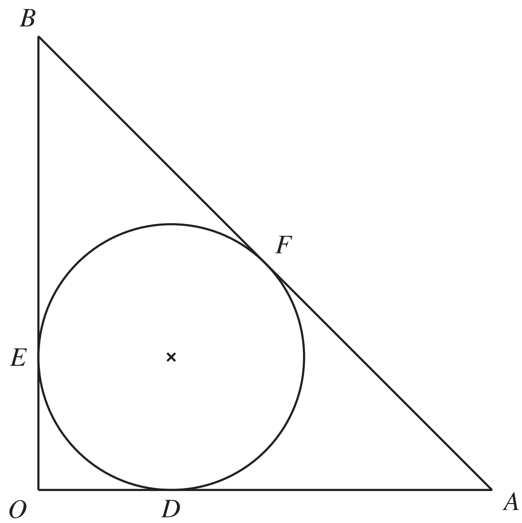
$$\frac{(6)(8)}{2} = \frac{(6)(r)}{2} + \frac{(8)(r)}{2} + \frac{(\sqrt{6^2+8^2})(r)}{2}$$
$$r = 2$$

內心的坐標為 (2, 2)。

17. $\boxed{\text{D}}$

將內心記為 X。
設 D、E 及 F 分別為 OA、OB 及 AB 上的點使得 $XD \perp OA$、$XE \perp OB$ 及 $XF \perp AB$。
設半徑為 r。
$OD = OE = r$。
$AD = AF = 6 - r$ 及 $BE = BF = 6 - r$。

$$(6-r)+(6-r) = \sqrt{6^2+6^2}$$
$$r = 6 - 3\sqrt{2}$$



18. $\boxed{\text{D}}$

通過 B 的高線為鉛垂線。
垂心的 x 坐標為 24。
設垂心的坐標為 (24, y)。

$$\frac{y-0}{24-0} \times \frac{18-0}{24-48} = -1$$
$$y = 32$$

19. $\boxed{\text{D}}$

由於 OA 為鉛垂線，垂心在通過 B 的水平線上。
因此，垂心的 y 坐標 $= -12$。
設垂心 H 的坐標為 (x, -12)。由於 $AH \perp BO$，

$$\frac{36+12}{0-x} \times \frac{12}{16} = -1$$
$$x = 36$$

20. $\boxed{\text{D}}$

設 $H\ (h,\ k)$ 為垂心。

$$AH \perp BC \quad \text{及} \quad\quad\quad BH \perp AC$$

$$\frac{k+19}{h+38} \times \frac{9+1}{-10+2} = -1 \quad\quad \frac{k-9}{h+10} \times \frac{-1+19}{-2+38} = -1$$

$$\frac{k+19}{h+38} = \frac{4}{5} \quad\quad \frac{k-9}{h+10} = -2$$

求解後，可得 $h = -8$ 及 $k = 5$。

21. $\boxed{\text{D}}$

頂點的 x 坐標 $= \dfrac{-k}{2(1)} = -\dfrac{k}{2}$

PR 的中點 $= \left(-\dfrac{k}{2},\ 0\right)$

考慮形心的 x 坐標，

$$-2 = \frac{0(1) + \left(-\frac{k}{2}\right)(2)}{1+2}$$

$$k = 6$$

22. $\boxed{\text{C}}$

設 Q 的坐標為 $(p,\ q)$。將 $\triangle OPQ$ 的垂心記為 H。

$$OP \perp QH \quad \text{及} \quad\quad PH \perp OQ$$

$$\frac{-18}{26} \times \frac{q-21}{p+3} = -1 \quad\quad \frac{-18+3}{26-21} \times \frac{q}{p} = -1$$

$$13p - 9q = 300 \quad\quad p - 3q = 0$$

求解後，可得 $p = 30$ 及 $q = 10$。

因此，Q 的 y 坐標等於 10。

23. $\boxed{\text{B}}$

$\triangle OAB$ 為直角三角形。故此，$\triangle OAB$ 的垂心在 O。

$\triangle OAB$ 的面積 $= \dfrac{1}{2}(12)(16) = 96$

$AB = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20$。設所求距離為 d。藉考慮 $\triangle OAB$ 的面積，

$$\frac{1}{2}(AB)(d) = 96$$

$$d = 9.6$$

24. $\boxed{\text{C}}$

直線 $x - 2y + 10 = 0$ 垂直於直線 $2x + y + a = 0$。
三條線形成的三角形為直角三角形。垂心在直角頂點。
當 $x = -6$ 時，

$$\begin{aligned}(-6) - 2y + 10 &= 0 \\ y &= 2\end{aligned}$$

代 $(-6,\ 2)$ 至 $2x + y + a = 0$，

$$\begin{aligned}2(-6) + (2) + a &= 0 \\ a &= 10\end{aligned}$$

25. $\boxed{\text{A}}$

$P\left(\frac{k}{2},\ 0\right)$、$Q\,(0,\ -k)$ 及 $R\,(0,\ k)$。
外心在 QR 的垂直平分線上，即 x 軸。
外心在 $(-3,\ 0)$。

$$\begin{aligned}\frac{k}{2} - (-3) &= \sqrt{3^2 + k^2} \\ 0 &= \frac{3k^2}{4} - 3k \\ k &= 4 \quad \text{或} \quad 0\end{aligned}$$

R 的 y 坐標 $= 4$

26. $\boxed{\text{B}}$

$A = \left(\frac{k}{3},\ 0\right)$ 及 $B = \left(0,\ \frac{k}{4}\right)$

外心在 AC 的垂直平分線上。故此，$h = \dfrac{k + \frac{k}{3}}{2} = \dfrac{2k}{3}$。
外心與 B 及 A 等距，

$$\begin{aligned}\sqrt{\left(\frac{2k}{3} - k\right)^2 + 38^2} &= \sqrt{\left(\frac{2k}{3}\right)^2 + \left(38 - \frac{k}{4}\right)^2} \\ -\frac{4k^2}{3} + k^2 &= -19k + \frac{k^2}{16} \\ k &= 48 \quad \text{或} \quad 0\text{（捨去）}\end{aligned}$$

故此，$h = \dfrac{2}{3} \times 48 = 32$。

27. $\boxed{\text{D}}$

外心與兩頂點等距。

$$\begin{aligned}\sqrt{(k + 4)^2 + (-4 + 8)^2} &= \sqrt{(k - 6)^2 + (-4 - 2)^2} \\ k^2 + 8k + 32 &= k^2 - 12k + 72 \\ k &= 2\end{aligned}$$

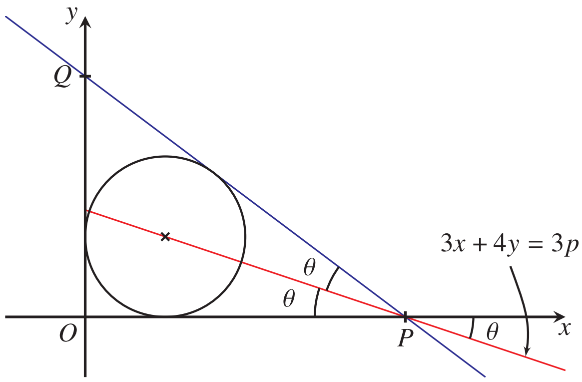
28. $\boxed{\text{D}}$

留意 $(p,\ 0)$ 滿足方程 $3x + 4y = 3p$。

直線 $3x + 4y = 3p$ 通過 $P\ (p,\ 0)$ 和 $\triangle OPQ$ 的內心。

故此，它是 $\angle OPQ$ 的角平分線。

設該直線與 x 軸之間的銳角為 θ。



$$\text{直線的斜率} = -\frac{3}{4} = -\tan\theta \qquad \text{及} \qquad \frac{OQ}{OP} = \tan 2\theta$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{3}{4} \qquad\qquad \frac{q}{p} = \frac{24}{7}$$

$$p : q = 7 : 24$$

29. $\boxed{\text{D}}$

直線 $5x + 4y = 4b$ 通過點 $B\ (0,\ b)$。

故此，$5x + 4y = 4b$ 通過 OA 的中點 $\left(\frac{a}{2},\ 0\right)$。

$$5\left(\frac{a}{2}\right) + 0 = 4b$$

$$\frac{a}{b} = \frac{8}{5}$$

30. $\boxed{\text{A}}$

I. ✓。G 在 $\triangle OAB$ 內，即在第二象限內。x 坐標與 y 坐標不相同（一正一負）。

II. ✓。設內切圓的半徑為 r。則 G 的坐標為 $(-r,\ r)$。

$$\begin{aligned} 4r + (-r) &= 3kb \\ r &= kb \end{aligned}$$

利用切線性質，OB 被分成兩線段，長度為 $b - r$ 及 r。
OA 被分成兩線段，長度為 $10 - r$ 及 r。

$$\begin{aligned} (10 - r) + (b - r) &= \sqrt{10^2 + b^2} \\ [10 + b(1 - 2k)]^2 &= b^2 + 100 \\ 100 + 20b(1 - 2k) + b^2(1 - 2k)^2 &= b^2 + 100 \\ b^2(4k^2 - 4k) + 20b(1 - 2k) &= 0 \\ b &= -\frac{20(1 - 2k)}{4k^2 - 4k} \\ &= \frac{5(1 - 2k)}{k(1 - k)} \end{aligned}$$

所求距離 $= r = kb = \dfrac{5(1 - 2k)}{1 - k}$

III. ✗。當 $k = \dfrac{1}{6}$ 時，$r = \dfrac{5(1 - 2k)}{1 - k} = 4$。
內切圓的方程為 $(x + 4)^2 + (y - 4)^2 = 4^2$。

$$\begin{aligned} (x + 4)^2 + (5 - 3x - 4)^2 &= 16 \\ 10x^2 + 2x + 1 &= 0 \end{aligned}$$

$\Delta = 2^2 - 4(10)(1) = -36 < 0$
直線 $3x + y = 5$ 與 $\triangle OAB$ 的內切圓不相交，即不是切線。

– 試卷完 –